R

Kohlhaas

Math. U.
91-1

<36624992280019

<36624992280019

Bayer. Staatsbibliothek

m̄

~~1007~~ ~~Math. Un. 91.~~

~~Mathesis p. 148.~~

~~Medii~~

~~q. P. va.~~

~~V. P.~~

R

~~Kohlhaas~~

~~Kohlhaas~~

Reine
Mathematik
für
ſchon geübtere Jünglinge.

Arithmetik. Geometrie. Ebene Trigonometrie.
Fragmente aus der höhern Mathematik.

Mit X. Kupfertafeln.

Von

D. Johann Jacob Kohlhaas,

praktiſchem Arzt, und erſtem Stadtphyſikus, der Regensb. bot. Geſellſch. Präſes, der Röm. Kaiſ. Acad. der Natur≠forſcher, der correſpondir. Aerzte und Wundärzte in Zürich, der phyſical. Geſellſch. in Göttingen und der patr. zu Heſſenhomburg Mitglied.

Nürnberg,

in der Kaiſerl. privilegirten Kunſt≠ und Buchhandlung bey A. G. Schneider und Weigel.

1798.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Der Erlauchten

Römiſch = Kaiſerlichen Akademie

der

Naturforſcher

wiedmet

aus ehrerbietiger Dankbarkeit

für die

im Jahr 1794 geſchehene hochgeneigte Aufnahme unter Ihre Mitglieder,

dieſe

zwote Auflage des erſten Bandes ſeiner Anleitung zur Bildung ächter Wundärzte

mit aller Verehrung

der Verfaſſer.

Vorrede zur zwoten Auflage.

Da ſich der erſte Band meiner Anleitung, welcher im Jahr 1784. heraus kam, ganz, und der zweite Band, faſt ganz vergriffen hat, ſo hat die Schneider und Weigelſche Verlagshandlung in Nürnberg eine zwote Auflage von beiden Bänden zu veranſtalten geſucht. Dermalen folgt der erſte Band, der ſeit dem September 1795. im Pult geruht hat. Das Manuſcript zum zweiten iſt ſeit 1796. in den Händen meines Herrn Verlegers. Ich revidirte genau, und würde, um mehr Gleichheit zu beobachten, lieber das Ganze umgearbeitet haben, wenn es meine Zeit geſtattet hätte; doch verliert die Sache an ſich nichts. Um die Wünſche einiger meiner ehemaligen Kunſtrichter zu befriedigen, hab ich die Lehre von den entgegengeſetzten Größen, die Buchſtabenrechnung und logarithmiſche Rechnung, die Lehre von den einfachen Gleichungen und einige Aufgaben der höhern Rechenkunſt, wie auch die ebene Trigonometrie beigefügt. Am Schluß wiederholte ich die in dem Buch vorkommenden Erklärungen, Grundſätze, Lehrſätze und Aufgaben, weil ich ſie als Erleichterung für Lehrer und Schüler nach geendigtem Curſus anſehe. Es ſind vier neue Kupfertafeln hinzugekommen, und das Regiſter und lateiniſch-teutſche Wörterbuch haben Aenderung und Zuſatz erfahren. Da die ſphäriſche Trigonometrie hauptſächlich in den aſtronomiſchen

und damit verbundenen Wiſſenſchaften, die ebene aber in allen mathematiſchen Wiſſenſchaften Nutzen hat, ſo wählte ich dieſe, und ließ jene weg. Die Vorrede zur erſten Auflage kürzte ich ab, die Zuſchrift an meine damaligen Zuhörer beſchnitt ich nur wenig und zwar nur da, wo ſich einſt ein Rezenſent über einen etwas ſchwülſtigen Ausdruck luſtig machte; mit den übrigen in jener Zuſchrift aufgeſtellten Sätzen bin ich noch jetzt verſtanden. Der kleine Raum, den die Markſcheidekunſt einnimmt, wird niemand irren. Freilich bin ich weitläufiger worden, als bei der erſten Auflage, allein da der Eine die Rechenkunſt für mangelhaft, der Andere die Geometrie für einen verſtümmelten Käſtner anſah, ſo wollte ich dieſe Lücken ausfüllen, um ſo eher, da das Buch unter zweierlei Titeln in die Welt tritt. Ob jene Kunſtrichter in allen Stücken Recht hatten, unterſuchte ich im Jahr 1789. und die Urtheile verſchiedener über meinen Plan und Arbeit ſind nebſt meinen Anmerkungen dem vierten Band der Anleitung vornen angehängt. Wem unter den chirurgiſchen Zöglingen die erſte Auflage zu ſchwer oder zu lang war, dem wirds die zwote freilich noch mehr ſeyn; wer aber jene begriff (manche haben ſie begriffen), dem wird eine Erweiterung ſeiner Kenntniſſe nicht unangenehm ſeyn. Käſtner und Clemm waren auch hier meine Hauptführer, die übrigen hab ich nebſt dieſen im Verzeichniß, ſo wie jedesmal, bemerkt.

Regensburg den 11. Dec. 1797.

Der Verfaſſer.

Abgekürzte Vorrede
zur erſten Auflage.

Der Anfang meiner Anleitung zur Bildung ächter Wundärzte erſcheint nun vor den Augen des leſenden und kunſtrichterlichen Publikums. Seit der Ausbreitung meiner Ankündigung hat es, wie es bey einer jeden guten Sache zu geſchehen pflegt, an Urtheilen verſchiedener Art nicht gemangelt. Es haben aber Männer von Anſehen, Kunſt und wahren Verdienſten mich theils zur Ausführung meines Vorhabens ſelbſt ſchriftlich aufgefordert, theils auffordern laſſen, und meine preißwürdige hohe Obrigkeit hat durch den öffentlich geſchenkten, mir ſo verehrlichen Beyfall meinem Trieb zur Vollbringung meiner Abſicht eine ſolche Richtung gegeben, daß ich Bedenklichkeiten, Schwürigkeiten, und ſchiefe Critik für den allergeringſten Gegenſtand hielt, und dasjenige zu unternehmen wagte, was mir zwar ſchwer, aber doch nicht ganz unmöglich deuchte.

Da ich mich ſowohl in meiner Ankündigung bereits erklärt habe, als auch in einer

eigenen Zuſchrift an meine Zuhörer über meinen wiſſenſchaftlichen Plan näher erkläre, ſo bleibt mir in der eigentlichen Vorrede zu ſagen wenig übrig; doch, diß Wenige darf ich nicht vorenthalten.

Zur Schande unſers mediciniſchen Zeitalters muß ich es ſagen, daß es noch immer Aerzte gibt, die es für eine Art von Verbrechen halten, wenn man die Wundärzte klüger machen will, als der gröſte Theil derſelben, nach der bisher gewöhnlichen Erziehung, iſt und ſeyn kann.

Noch immer gibt es Aerzte, die es für unzeitigen Eifer anſehen, wenn man die heranwachſende chirurgiſche Jugend durch richtige Grundſätze der Tummheit entreiſſen, und auf ſo wichtige Pflichten, deren gründliche Erfüllung nicht allein von einem gebeſſerten Herzen, ſondern geſunden Unterricht abhängt, aufmerkſam machen will.

Noch immer gibt es Aerzte, die, weil ſie glauben, „mit der Bildung eines brauchbaren Wundarztes ſey die Bildung zum mediciniſchen Pfuſcher genau verbunden,„ nicht nur jene nicht fördern, ſondern wohl gar zu unterdrücken ſuchen, damit nur ihre Privatſache, ſie heiſſe nun Eigennutz, Herrſchſucht oder Stolz, nicht geſchmälert werden möge.

Trau-

Trauriges Schickſal für die Aufnahme der Kunſt!

So lang nicht Obrigkeiten und Aerzte in großen und kleinen Städten gemeinſchaftliche Hülfe leiſten; ſo lang es Mode iſt, chirurgiſche Lehrlinge zu den niedrigſten Arbeiten anzuhalten; ſo lang noch würklich erfahrne Wundärzte vor dem Krankenbett heruntergeſetzt, denkende Männer zu Knechten und Sclaven gemacht werden; ſo lang dieſe den Gedanken hegen müſſen: „Was nützt mich mein Fleiß, Koſten und Zeitverluſt, wenn ich nicht unterſtützt, nicht aufgemuntert werde? lieber laſſe ich das fernere Studiren fahren, und folge blindlings dem Willen des gebieteriſchen Arztes, es gehe auch, wie es wolle", ſo lange wird es in den meiſten Gegenden Nacht bleiben, ſo lang wirds noch chirurgiſche Pfuſcher unter den Wundärzten geben.

Was aber die mediciniſche Pfuſcherey der Wundärzte betrift, ſo iſt ſie beinahe zum nothwendigen Uebel geworden. Sie hat vor mir Vorſchub gefunden, wird ihn nach mir finden, und jedes Zeitalter wird die Klage führen: Wenn nur nicht ſo viel Pfuſcher wären!

Aber, doch ein paar Worte im Ernſt hievon! Wenn es wahr iſt, daß Aerzte und

Wundärzte die Gebrechen des menſchlichen Körpers heilen ſollen, ſo muß es auch wahr ſeyn, daß ſie gleiche Wiſſenſchaften zu erlernen haben, und nur in der Ausübung derſelben voneinander unterſchieden ſind. So, wie ein brauchbarer Arzt wenigſtens theoretiſcher Wundarzt ſeyn muß, ſo muß ein brauchbarer Wundarzt wenigſtens ſo viel mediciniſche, theoretiſche Kenntniſſe beſitzen, als er bey der Ausübung ſeiner Kunſt täglich nöthig hat. In dieſer Rückſicht, wenn er mit den Gränzen der Medicin nicht zufrieden iſt, wenn er ſich tiefer ins Heiligthum hinein wagt, iſt ihm freylich der nächſte Weg zur mediciniſchen Pfuſcherey offen. Allein, hier ſind zween Fälle; entweder betritt er dieſen Weg in der Stadt, oder auf dem Land. Iſt das erſte, ſo kann ihm eine gute mediciniſche Policey auf die Finger klopfen, und in gehörige Schranken zurück weiſen. Iſt das andere, nemlich auf dem Land, wo kein Arzt iſt, wo ſo viel unſchuldig Blut aus entſetzlicher Unwiſſenheit, und kühntoller Dreuſtigkeit vergoſſen wird, wo es verjährte Gewohnheit und Recht worden iſt, zuerſt zum Bader zu laufen, ſo frage ich alle Bidermänner auf ihr Gewiſſen, ob es nicht rechtſchaffener gehandelt ſey, eben ſolchen Landwundärzten durch guten Unterricht den rechten Weg zu zeigen, als Sie und ihre Kranken, über deren

ren Leben ſie noch immer zum Herrn geſetzt werden, dem Gerathewohl zu überlaſſen.

Ob aber benannte Landwundärzte meine Anleitung werden gebrauchen können, wird der Erfolg lehren. Die erſtern Bände meiner Schrift werden freylich den Meiſten nichts, als Worte und Schall ſeyn; allein, da es mir hauptſächlich um die Bildung der Jungen und Geſellen dieſer Leute zu thun iſt, damit ein guter Same auf die Folge keimen möchte, und damit eben dieſe Zöglinge nicht leichtſinnig von ihrem Beruf urtheilen, ſo ſollen ſie doch überzeugt werden, wie viel dazu gehöre, ein ächter Wundarzt zu werden. Fällt es ihnen ſchwer, zumal Mathematik und Philoſophie zu begreifen, ſo wird ſich wohl in allen Gegenden wenigſtens ein Mann, ein menſchenfreundlicher Prieſter finden, der ihnen nach meiner gegebenen Anweiſung forthilft.

Nur noch einige Berichtigungen, meine Arbeit betreffend!

In gegenwärtigem Bande hab ich des berühmten Herrn Hofrath Käſtners Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie zum Grund gelegt, und als Leitfaden gebraucht; hab hin und wieder die Schriften der Herren von Wolff, und Clemm benützt, bin aber in der Lehre von den Körpern dem Herrn Prof. Ebert vorzüglich gefolgt. Herrn Prof. Voitus vortreflichen Reden an die

jungen

jungen Wundärzte hat meine Zuſchrift manche lebhafte Ideen zu verdanken.

Ich verſprach bloſſe Auszüge; ob ich nun diß oder noch mehr leiſte, und ob meine Arbeit als Lehrbuch taugen werde, überlaſſe ich der Entſcheidung Einſichtsvollerer Männer, deren Beyfall oder ſanftbelehrenden Tadel ich dankbar erkennen, und mir zu Nutzen machen werde.

Habe ich Manchem zuviel geſagt, ſo bitte ich zu bedenken, daß ich nicht mit meinen Zuhörern allein, ſondern gröſtentheils mit auswärtigen Leſern zu thun habe, die, wenn Sie nicht gleich einen Lehrmeiſter finden, bey natürlicher guter Anlage ſich in in vielen Stücken ſelbſt helfen ſollen; hab ich aber zu viele Lücken gelaſſen, ſo denke man, daß ich für Jünglinge ſchreibe, denen ein weitläufigerer Vortrag Abneigung machen würde. Soviel glaube ich immer, daß junge Wundärzte Hauptwahrheiten aus meiner Schrift werden lernen, und dadurch in den Stand kommen können, ſich durch eigenen Fleiß, wenn ihre Wisbegierde wächst, weiter fortzuhelfen.

Regensburg den 20 April, 1784.

Der Verfaſſer.

Zuſchrift

Zuſchrift an meine Zuhörer.

Meine Herren!

Mit warmem Gefühl von Achtung und Liebe, die Ihnen mein Herz nach dem Verhältniß, worinnen ich als Lehrer mit Ihnen ſtehe, gewidmet hat, liefere ich den Anfang eines Werks in Ihre Hände, das, wenn Sie es recht gebrauchen, ein Hülfsmittel werden kann, Sie über den chirurgiſchen Handwerker zu erheben, und zum gelehrten Wundarzt zu bilden.

Sie wiſſen bereits aus meiner Ankündigung, was mich zu einer ſo mühſamen Arbeit aufgemuntert hat, und aus eben derſelben haben Sie auch den Plan erſehen, nach welchem ich Sie in Zukunft die Wiſſenſchaften lehren will.

So ſehr ich Sie als fleißige und lehrbegierige Schüler öffentlich zu rühmen mich verpflichtet erkenne, ſo glaube ich, dieſem Zeugniſſe ungeachtet, doch, daß meine Forderung Manchem unter Ihnen zu groß, und meine Abſicht unerreichbar vorgekommen iſt; damit ich Sie nun eines Beſſern belehren könne, bitte ich mir ihre ganze Aufmerkſamkeit aus.

Die Wundarzneikunſt iſt nicht ſowohl Kunſt, als gelehrte Wiſſenſchaft. Wer ſie lernen will, muß nicht nur eine fertige Hand, ſondern auch einen fähigen Geiſt, nicht einen vorbeirauſchenden, ſondern einen thätigen, täglichen Fleiß haben.

Thöricht iſt der Jüngling, der ſich in ſeinem Herzen bloß deßwegen ſegnet, weil er eine Ader öfnen, Schröpfköpfe ſetzen, Blaſen ziehen, Binden geſchickt anlegen und andere ähnliche Handlungen verrichten kann, die eine mittelmäßige Fähigkeit erfordern, die der Geſell durch öftern Umgang mit ſeinem Meiſter, und durch wiederholte Uebung ſo gut als Er, und ein chirurgiſcher Charlatan ſo niedlich, als der würklich gründliche und gelehrte Wundarzt zu verrichten im Stande iſt.

Thöricht iſt der Jüngling, der ſeine Fähigkeit zum Operiren an lebendigen Menſchen nach der Fertigkeit ſeiner Hand im Operiren an Leichnamen abmißt.

Operationen an lebendigen Menſchen zu machen, wo eben nicht immer alle Handgriffe vorher beſtimmt werden können, wo Hand und Verſtand einander beſtändig begleiten müſſen, wo es nicht gleich viel iſt, einige Linien tiefer oder ſeichter zu ſchneiden, ſagen Sie ſelbſt, meine Herren, ob nicht in ſolchen Fällen ein reiches Maas von Geiſteskraft,

kraft, viele und vielerlei Kenntniſſe nothwendig ſeyen, und ob man alles diß von einem Alltagskopf, einer ſorgloſen Bildung und einem Müſſiggänger erwarten könne?

Wie wollen Sie eingeklemmte Brüche geſchickt operiren, wenn Ihnen nicht die Urſachen der Einklemmung, die Bauart der eingeklemmten Theile, der mannigfaltige Zuſtand, worinnen ſich die im Bruch enthaltenen Theile befinden können, und die Heilarten aller vorkommenden Zufälle immer vor Augen ſchweben, ſollten Sie auch unzählichemal ſich durch Uebung an Leichnamen die gröſte Geſchicklichkeit, das Meſſer zu führen, erworben haben?

Sehen Sie zehen und mehr als zehenmal dem geſchickteſten Operateur zu, werden Sie dadurch vollkommener und brauchbarer, bringen Sie aber alle Kenntniſſe des Operateurs nicht ſelbſt mit, ſo werden Sie niemals den Nutzen davon haben, den Sie ſich zu haben wünſchen. Denn nicht nur ſolche Operationen, wo man jeden Handgriff zum voraus nicht beſtimmen kann, ſondern auch ſolche, wo alle Handgriffe beſtimmt, und zuvor an todten Körpern erlernt und geübt werden können, beruhen nicht bloß auf Nachahmung, auf Geſchicklichkeit Ihrer Hand, ſondern auf einem ſichern, feſten Blick in den Zuſtand aller vorkommenden Symptomen, und auf einem fertigen Entſchluß, auch in unbekannten Fällen von der Hauptſtraſſe abzugehen, und einen ſteilen Nebenweg zu betreten.

Oft werden Sie bey dem Geſchrey Ihres leidenden Nächſten oder ſeiner Verwandten in Gefahr ſtehen, Ihre Entſchloſſenheit zu verlieren, — oft an Ihrem eigenen Wiſſen zaghaft werden, — oft ſich den Muth und die Kenntniſſe eines Meckels, Richters, Schmuckers, Bilguers und Thedens wünſchen.

Glauben Sie, daß es bey Abſceſſen, Fiſteln, Sackgeſchwülſten, Krebsſchäden, Gelenkgeſchwülſten, Knochenkrankheiten u. ſ. w. blos auf Operiren, oder Anwendung äuſſerlicher Mittel, oder auf einen geſchickten Verband ankomme? Nein, ſo ſehr es zur Zierde eines Wundarztes gereicht, eine Binde nett anzulegen, nach den Regeln zu operiren, die Würkungen der äuſſerlichen Mittel und die zierliche Application derſelben zu wiſſen, ſo bleiben Sie dennoch bey aller dieſer mechaniſchen Fertigkeit im Finſtern, wenn Sie nicht die verſchiedene Natur oben bemeldter Krankheiten erkennen, ihren oft ſo ſehr abwechslenden Sitz in dem ſiechen Körper nicht in Rückſicht nehmen, nicht ſchnell zu beurtheilen wiſſen, ob eine Abänderung des gefaßten Entſchluſſes nöthig ſey oder nicht?

Wie wollen Sie aber abändern, wenn Sie nicht Ueberlegung gelernt haben? — Wie wollen Sie Ueberlegung lernen, wenn nicht ihr Kopf zum Denken, zum Schlüſſe machen gewöhnt iſt? —

Wodurch kann ihr Kopf am beſten dazu gewöhnt werden, als durch Wiſſenſchaften? Und welche Wiſſenſchaften ſind hiezu am allerſchicklichſten, als Mathematik und Philoſophie? Wenn Sie von beyden eben genannten Zweigen der Gelehrſamkeit keine weitere Vortheile, als die ich eben erwähnt habe, hätten, ſo wäre es ſchon genug Entſchuldigung für mich, daß ich ſie als Vorbereitungswiſſenſchaften Ihrem Hauptſtudio vorangeſetzt habe. Aber, ich kann Ihnen, zumal von der Mathematik, noch mehrere Vortheile ſagen, — Vortheile, die Ihnen gleich in die Augen fallen müſſen; einiger für Sie dermalen minder einleuchtenden, aber dennoch wichtigen — nicht einmal zu gedenken! Ohne Rückſicht auf Ihr künftiges, häusliches Leben, worinn Ihnen die Mathematik Nutzen und Vergnügen ſchaffen kann, will ich dieſe Wiſſenſchaft blös auf Ihr chirurgiſches Studium anwenden.

Wie wollen Sie die Compoſition eines äuſſerlichen Mittels, z. E. der Schmuckeriſchen kalten Fomentation, oder des Thedenſchen Schußwaſſers im Kleinen ſelbſt machen, oder aus der Apotheke verſchreiben, wenn Sie nicht Rechenkunſt, und beſonders die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen wiſſen?

Verſtehen Sie den Sinn der Worte: „pyramidenförmig, kegelförmig, tiſchförmig, ſchief, gerad, perpendicular, dreieckig, viereckig, regulair, irregulair, parallel, cylindriſch, rautenförmig, Winkel„ u. ſ. w. (Worte, die Sie ſo oft in der Anatomie hören!) ohne Geometrie?

Können Sie ſich die wunderbaren Bewegungen in dem menſchlichen Körper, vorzüglich die Art der Würkung der Muſkeln auf Ihre Gliedmaſſen und Werkzeuge lebhaft genug vorſtellen, und ſind Sie im Stand, chirurgiſche Inſtrumente und Maſchinen geſchickt zu beurtheilen, oder zu erfinden, oder erfundene zu ändern, ohne die Grundſätze der Mechanik inne zu haben?

Wie wollen Sie ſichs erklären, daß Ertrunkene im Anfang zu Boden ſinken, und nach einigen Tagen in die Höhe ſteigen, — ja wie wollen Sie ein geſundes Urtheil fällen, wenn Sie künftig als geſchworne Wundärzte von Ihrer Obrigkeit aufgefordert werden, durch die Lungenprobe *) gericht-

*) Hier ſind die einem gewiſſen Rezenſenten ſchwülſtig ſcheinenden Worte weggelaſſen worden. K.

gerichtlich anzugeben, ob das neugebohrne Kind einer verdächtigen Dirne todt gebohren, oder getödtet worden ſey, ohne die Regeln der Hydroſtatik zu wiſſen?

Werden Sie wohl von den Eigenſchaften der Luft, der Nothwendigkeit derſelben zu den täglichen Bedürfniſſen, von ihrer Würkung auf den menſchlichen Körper, vorzüglich auf das Gehörorgan, ohne Aerometrie mehr wiſſen, als ein Taglöhner?

Können Sie ſich von dem Herzen, das eine doppelte Maſchine, ein Druckwerk am ähnlichſten vorſtellt, oder von dem Ausſpritzen des Bluts in eine unbeſchreibliche Menge kleiner Adern, und von den Valveln, oder Ventilen der Blutadern, welche ſich öfnen, wenn das Blut gegen das Herz hinfließt, hingegen verſchlieſſen, wenn es von dem Herzen zurückgehen wollte, ohne die Grundwahrheiten der Hydraulik, ſchickliche Begriffe machen?

Wird Ihnen das wohlthätige Geſchenk des Himmels, Ihr Aug, nicht noch mehr Stoff zur Anbetung des Schöpfers geben, wenn Sie aus der Optik, Catoptrik und Dioptrik von den Lichtſtrahlen und von dem herrlichen Sinn des Sehens die nöthige Belehrung erhalten haben?

Ja, wie wollen Sie ohne die letztere Wiſſenſchaft, ich meyne die Dioptrik, Ihren künftigen am Geſicht geſchwächten Kranken brauchbare Augengläſer rathen, oder ſie geſchickt verbeſſern helfen?

Sollten Ihnen die angeführten Beweiſe noch keine befriedigende Ueberzeugung von der Nothwendigkeit der Mathematik bey dem chirurgiſchen Studio geben, ſo will ich ſie mit Beweiſen von einer andern Seite noch mehr unterſtützen.

Daß Sie nicht Wundärzte werden können, wenn Sie nicht Anatomie verſtehen, ſehen Sie gewiß Alle ein. Was hilft Sie aber die Kenntniß der Theile ihres Körpers, wenn Sie nicht den Nutzen derſelben wiſſen, der in der Phyſiologie vorgetragen wird?

Wie wollen Sie die Phyſiologie, oder die Lehre von der Natur des Menſchen, hinlänglich verſtehen, wenn Sie nicht die Phyſik, oder allgemeine Naturlehre, wovon jene ein Theil iſt, gelernt haben? Phyſik aber ohne Mathematik, und angewandte Mathematik ohne reine Mathematik iſt ein Bild ohne Leben.

Iſt nun Ihr Verſtand durch diejenigen Theile der Mathematik, deren Nutzen ich nur berührt habe, geſchärft worden, ſo ſind Sie nicht nur zur Philoſophie vorbereitet, ſondern dieſe wird Ihren Verſtand noch mehr aufklären, und Sie lehren, wie Sie Wahrheit finden, Irrthum vermeiden, und Ihren Willen beſſern ſollen.

Mit

Mit dieſen beyden Wiſſenſchaften vorbereitet führe ich Sie nun Ihrer künftigen Beſtimmung näher, welche darinnen beſteht, die Gebrechen Ihrer Mitmenſchen zu heilen.

Wollen Sie Ihr Haus nicht auf Sand bauen, ſo iſt es unumgänglich nöthig, daß Sie ſich um alle die angezeigten theoretiſchen und praktiſchen Wiſſenſchaften, deren keine zu viel angegeben iſt, bekümmern müſſen.

Sie haben, ſo gut als der Arzt, die Natur zu ſtudiren. Ehe Sie ſich aber mit der Natur des Menſchen beſchäftigen können, müſſen Sie ſich die Kennzeichen und Eigenſchaften der natürlichen Körper überhaupt durch die Naturgeſchichte bekannt machen, um in den Stand zu kommen, aus der Naturlehre faſſen zu können, was durch die Kräfte der natürlichen Körper möglich ſey; und dieſe beiden Wiſſenſchaften müſſen in dem Unterricht vorangehen, ehe man Ihnen von der Miſchung der Beſtandtheile der natürlichen Körper aus der Chemie ſagen darf, die ihren Nutzen auf die Phyſiologie, Pathologie und Heilkunde auf eine ſo merkwürdige Art verbreitet.

Mit ſolchen vorläufigen und allgemeinen Naturkenntniſſen bereichert, bekümmern Sie ſich alsdenn um den Menſchen; lernen Sie ſeine feſten Theile aus der Anatomie, ſeine flüßigen aber aus der Hygrologie *) kennen, und ſtudiren Sie ſeine ganze Geſchichte in der Phyſiologie.

Wie leicht muß Ihnen nun, nach ſo mancherley Vorbereitungen und nach vorausgeſetzter Kenntniß von dem Zuſtand eines geſunden Menſchen der Uebergang zu der Lehre von dem Zuſtand eines kranken Menſchen, zu der Pathologie, werden! Hier werden Sie aber nicht nur mit den Namen, Urſachen, Zufällen und Zeichen der Krankheiten, ſondern auch mit der Heilung derſelben bekannt gemacht. Dieſe Heilung geſchieht, nebſt einer guten Lebensordnung, durch Arzneien und chirurgiſche Handanlegung. Wollen Sie mit Arzneimitteln heilen, ſo iſt Ihnen die chirurgiſche Arzneimittellehre zu wiſſen nöthig; da aber dieſe nicht nur aus dem Thier- und Mineralreich, wovon Ihnen die Naturgeſchichte, Naturlehre, und Chemie das Nöthige ſagt, ſondern vorzüglich aus dem Pflanzenreich ihre Mittel entlehnt, ſo muß eine beſondere Pflanzenkenntniß der Arzneimittellehre vorangeſetzt werden. Bedarf Ihr Kranker Hülfe durch Verband oder Inſtrumente, ſo dürfen Sie in der Bandagen- und Inſtrumentenlehre kein Fremdling ſeyn. Haben Sie

*) Ueber dieſes Wort iſt eine Erklärung im 4 Band der Anleitung, einem Rezenſenten zu Gefallen. K.

Sie ſich mit dieſen chirurgiſchen Vorbereitungswiſſenſchaften gewiſſenhaft, treu und fleißig bekannt gemacht, ſo ſchreiten Sie kühn zu den allgemeinen und beſondern Lehren der praktiſchen Chirurgie, die ich Ihnen in meiner Ankündigung (Art. 14 — 29.) angezeigt habe.

Nach einem endlich für Sie ſo ſiegvoll ausfallenden Ende Ihres chirurgiſchen Laufs fangen Sie nun eine neue Epoque an! Bekümmern Sie ſich um fremde und um eigene Erfahrungen. Fremde Erfahrungen erlangen Sie durch fleißiges Forſchen in den Schriften bewährter Männer, alſo durch Bücherkenntniß. Ihre eigene Erfahrungen werden ſodann, wenn Sie jene recht zu benutzen wiſſen, durch glückliche Unternehmungen vor dem Bett Ihrer künftigen Kranken, mit Ruhm und Ehre gekrönt werden.

Aus dieſer ganzen Kette von Wiſſenſchaften ſehen Sie, meine Herren, die Wichtigkeit Ihres Berufs. Laſſen Sie ja den bequemen Gedanken: „Warum ſollen wir denn ſo viel lernen? Kommt etwas wichtiges vor, ſo ſtehen wir ja unter der Leitung der Aerzte," nicht in ſich aufkeimen! Nicht davon zu reden, daß nicht alle Aerzte ſich um die Theorie der Wundarzneikunſt bekümmern, noch viel weniger praktiſche Wundärzte ſind, und vermöge ihres eigenen wichtigen Berufs, innerliche Krankheiten zu heilen, nicht allemal ſeyn können, und wenn Sie es ſeyn könnten und ſeyn wollten, gewiß von Ihnen und Ihren Mitbrüdern heimlich oder öffentlich als unrechtmäßige Beſitzer Ihres vermeintlich rechtmäßigen Monopoliums und Verdienſtes angeſehen würden, halte ich Ihnen, meine Herren, nur ſo viel entgegen, daß der Staat keine Wundärzte nöthig hat, wenn die Aerzte für Sie die Wundarzneikunſt ſtudiren ſollen. —

Diß ſind nun meine Geſinnungen, die ich Ihnen, als Ihr Lehrer, zu entdecken für Pflicht hielte; ich erkenne es aber für eben ſo viel Pflicht, noch, als Freund, ein paar Worte mit Ihnen zu ſprechen, Worte, die Ihr Herz und Ihr ganzes ſittliches Betragen, vorzüglich auf Ihre künftigen Tage betreffen.

Ihre zu erwerbenden oder erworbenen Kenntniſſe werden den guten Eindruck auf das Herz Ihrer Mitbürger lange nicht ſo kräftig machen, wenn Sie nicht durch die Güte Ihres moraliſchen Characters den Werth derſelben zu erhöhen gelernt haben.

Lernen Sie alſo vor allen Dingen Menſchenliebe! In Anſehung der Hülfe, die Sie leiſten ſollen, ſey Ihnen der Reiche, wie der Arme! Trachten Sie, allgemein nützlich zu ſeyn, allgemein Gutes zu thun! Nicht nur in tapezirte Zimmer, nein, auch in modernde Hütten Ihres dürftigſten Mitbru-

ders müſſe ihr Fuß gern gehen, um Ihren mitleidigen Beyſtand daſelbſt zu verbreiten. Bey ſolchen Geſinnungen werden Sie zwar Ihre Käſten nicht füllen können, aber die göttliche Vorſicht wird Sie auch nicht darben laſſen; mit ſüſſem Bewuſtſeyn Ihrer edlen Handlungen, mit frölicher Erinnerung an die von Ihnen erfüllte Pflichten werden Sie ſich jeden Abend zur Ruhe legen, und mit Sehnſucht dem Morgen wieder entgegen ſehen, um neue Beweiſe eines von Gott geſtimmten menſchenfreundlichen Herzens geben zu können. Eben dieſer menſchenfreundliche Character wird Sie auch vor der Seuche, die ſo manche angeſteckt hat, bewährt gefundene Mittel als Geheimniſſe für ſich zu behalten, verwahren; Sie werden, wenn Sie in dieſen Fall einſt kommen ſollten, ſich nicht durch ſchändliche Gewinnſucht, nicht durch übertriebenen Stolz die Mine eines Mehrwiſſers anzunehmen, zu einer Sache verleiten laſſen, die, wenn nicht gute Beweggründe zur Geheimhaltung vorhanden ſind, in ein Laſter ausartet, gegen welches ich Ihnen einen ernſtlichen Haß frühzeitig beybringen möchte.

Der Geiz, die Wurzel alles Uebels, komme nie in Ihre Seele!

Stehen Sie gegen die Eigenliebe auf der Hut; Je mehr Eigenliebe, je weniger wahres Verdienſt; gefährlich iſt es, ſich von ihr leiten zu laſſen, und ſeine Verdienſte, wenn es nicht auf dem geraden Weg ſeyn kann, durch krumme Wege geltend zu machen.

Eigendünkel und Selbſtgenügſamkeit ſeyen Ihnen gehäſſige Eigenſchaften! Lernen Sie den Werh oder Unwerth ihrer Kenntniſſe, mit Unparthe lichkeit beſtimmen, ſo werden Sie ſich nie überheben, nie andere verachten, Ihre Kenntniſſe in Rückſicht derer, die mehr, als Sie wiſſen, immer noch eingeſchränkt, und Grund genug finden, von Andern zu lernen. Eher werde zu groſſes Mißtrauen auf Ihre Kräfte, zu groſſe Geringſchätzung Ihrer ſelbſt Ihr liebenswürdiger Fehler, als daß Sie durch eine erborgte Mine wichtiger Männer im Staat wider ihre Würde ſündigen.

Gehen Sie mit Ihrem Nächſten überhaupt, mit Ihren künftigen Amtsbrüdern aber vorzüglich, aufrichtig und ohne Argliſt um! Die Argliſt geht mit dem Eigendünkel immer Hand in Hand, und arbeitet an dem Umſturz des guten Rufs Anderer.

Bey verwickelten Krankheiten ſetzen Sie die Pflicht nie aus den Augen, die Beihülfe eines Arztes zu ſuchen; es iſt nicht Schande für Sie, wenn Sie diß thun, ſondern es gereicht vielmehr Ihrem Herzen und Ihrem Verſtand zur

 Ehre.

Ehre. Nur Stümper, Waghälſe, und vom Wiſſen Aufgeblaſene ſcheuen das Licht.

Schreiben Sie Ihre Erfahrungen auf. Lernen Sie aber ſolche mit Geiſt und Fähigkeit machen, prüfen Sie dieſelben nach den Regeln der Kunſt, und alsdenn treten Sie damit im Publico auf.

Laſſen Sie ſich die bey nahe allgemeine Klage über die Wundärzte, daß ſie hartherzige und rauhe Leute ſeyen, nie zu Schulden kommen.

Seyen Sie bey dem Leiden der Menſchen nie fühllos, bey dem Winſeln der Elenden nie taub! Unerſchrocken ſollen Sie ſeyn, herzhaft ſollen Sie werden, aber ja nicht unbarmherzig, ja nicht grauſam; und wenn Sie auch noch ſo viel Elend Ihrer Brüder ſehen, ſo müſſe ſich bey jeder Plage des Tages neues mitleidiges Gefühl Ihres Herzens bemächtigen. Auf ſolche Weiſe wird Rauhigkeit der Sitten ferne von Ihnen bleiben, und ſanftes, edles, der Menſchheit Ehre machendes Betragen, Ihre Perſon, Ihr Amt und Ihre Wiſſenſchaft verehrungswürdig machen. Wenn Sie eine Anlage zu dieſem herrlichen Geſchenke des Mitleids fühlen, (und ich habe das gute Zutrauen, daß ſie ein jeder unter Ihnen, trotz aller entgegengeſetzten Erziehungsfehler, fühlen werde,) ſo nähren Sie dieſe Anlage in ſich ſelbſt.

Leutſeligkeit, Gedult, Biegſamkeit, Verſchwiegenheit, und Beſcheidenheit ſeyen Ihre Begleiter; denn ein ungeſittetes, mürriſches, ungedultiges, ſteifes, ſchwatzhaftes und ruhmrediges Betragen hat ſchon ſo viele Ihrer Kunſtverwandten nicht nur bey Kranken von feinen Sitten, ſondern auch bey der niedrigen Claſſe von Menſchen unangenehm und verhaßt gemacht. Ich rüge dieſe Fehler nicht, als ob ich ſie an Ihnen, meine Freunde, bemerkte, nein, ich glaube von Allen das Gegentheil ſagen und behaupten zu können, aber verwahren möcht' ich Sie, damit Sie in Zukunft nicht darein fallen.

Gehen Sie ja nicht von einem Haus in das andere, um Ihre Thaten vor dem Krankenbett zu erzählen, um vor den Leuten zu ſcheinen, oder gar Ihre Mitbrüder dadurch herunter zu ſetzen; denn der Mann von Erziehung findet Sie, wenn Sie diß thun, als Menſchen ohne Sitten, und der Mann von Verſtand als Menſchen ohne Verdienſt; Verdienſt aber iſt nicht ruhmredig. Der Mann von ächter Wiſſenſchaft wendet ſie ohne Pralerei an, und bekommt nur alsdann eine beredte Zunge, wenn ſeichte Köpfe ihm den Ruhm von tieferer Einſicht ſtreitig machen wollen.

Suchen Sie nicht Gunſt bey Menſchen durch ein kriechendes Betragen, denn es iſt die Eigenſchaft einer ſclaviſchen Seele. Wollen Ihre künftige Kranke Ihren Vorſchlägen nicht gleich Gehör geben, ſo laſſen Sie ſich vom Zorn nicht hinreiſſen; Beharrlichkeit auf dem einmal nach dem beſten Wiſſen und Gewiſſen gefaßten Entſchluß, und Sanftmuth können Sie doch noch zum Ziel Ihrer Wünſche bringen. Klugheit ſey die Gefährtin Ihres Lebens, und dieſe wenden Sie bey allen Ihren Unternehmungen, vorzüglich aber da an, wo man Sie mit Undank, oder nicht nach Würden belohnt, wo man Mißtrauen in Ihre Kenntniſſe, oder in Ihre Redlichkeit ſetzt, wo man Sie beſchuldigt, daß Sie Gewinns halber die Krankheit in die Länge zögen, wo neben Ihnen alte Weiber oder Scharfrichter gefragt werden; in allen ſolchen und andern ähnlichen Fällen unterdrücken Sie Ihre Empfindlichkeit, überwinden Sie die Leidenſchaft, bezwingen Sie Ihr Temperament.

Suchen unheilbare Kranke Ihren Beiſtand, ſo verſagen Sie ſolchen nicht, ob es gleich der täglichen Erfahrung gemäß iſt, daß der Arzt und Wundarzt nach dem Tode eines Menſchen, deſſen Krankheit unvermeidlich tödtlich war, einen Theil der Schuld tragen müſſen, und ſollte es auch nur durch Blicke und das Betragen der Umſtehenden geſchehen, worinnen man den Vorwurf leſen muß, daß man mit aller ſeiner Kunſt den Kranken doch nicht habe retten können. So ſehr es aber Ihre Pflicht iſt, ſolche Kranke anzunehmen und ihr Elend zu lindern, ſo ſehr iſt es auch Ihre Pflicht, in gefährlichen, doch nicht ſchlechtweg unheilbaren Uebeln, den Verwandten des Kranken die Schwierigkeit der Heilung und die Gefahr des Kranken anzuzeigen, damit man Sie, im Fall die Krankheit ſtärker wäre, als die Kunſt, nicht des Betrugs oder der Unwiſſenheit beſchuldigen könne.

Stellen Sie überhaupt eine Krankheit nie ärger vor, als ſie iſt; denn Marktſchreier, Quackſalber, und Männer, die ſich auf Nebenwegen in den Ruf bringen wollen, thun ſolches.

Verſprechen Sie nie, auf eine gewiſſe, beſtimmte Zeit die Krankheit zu heilen, denn es können Zufälle kommen, die Sie unmöglich haben vorausſehen können, die Sie an der Heilung hindern.

Nur die genaueſte Kenntniß des Characters Ihres Kranken muß Sie beſtimmen, ob Sie ihm Furcht oder Hofnung einzuflößen haben, ob ſie durch dieſe oder jene mehr über ihn vermögen; aber Klugheit muß hier immer von der Rechtſchaffenheit begleitet werden. Denken

Denken Sie, daß die erſte Viſite bey einem Kranken immer die wichtigſte ſey; denn iſt der erſte Zuſchnitt verdorben, ſo ſind die Folgen auf die ganze Krankheit traurig, ja auch bey dem erſten Beſuch eines Kranken, den Sie nie gekannt haben, müſſen Sie ſchon Ihre Maasregeln in Anſehung der Denkungsart deſſelben und der Umſtehenden nehmen.

Menſchenkenntniß alſo, und Scharfſinn, die Gemüther bald zu erforſchen, und mit Wahrſcheinlichkeit auf die Geſinnungen derjenigen zu ſchlieſſen, die ſich Ihrer Sorge anvertrauen wollen, iſt Ihnen unentbehrlich.

Daß Wundärzte, deren Geſchäfte ohnehin großentheils das Gepräge der Unſauberkeit an ſich tragen, ſich um ſo mehr der Reinlichkeit befleißigen, und nie eine Ehre darinn ſuchen ſollen, ſchmutzig zu ſeyn; wiſſen Sie ohne mich, und faſt könnte es Beleidigung ſeyn, dieſen Punkt zu berühren.

Hüten Sie ſich vor dem Laſter der Trunkenheit, es ſetzt den Menſchen unter das Vieh herab. Aerzte und Wundärzte müſſen Ihrer Sinne vorzüglich Meiſter ſeyn, weil Sie weder bey Tag noch Nacht wiſſen können, wenn Kranke ihrer Hülfe bedürfen. Müſſen nicht ſolche Hülfsbedürftigen vor dem Anblick eines trunkenen Mannes erſchrecken, vor ſeinem Recept zittern, und den Tod in den Töpfen zum Voraus vermuthen? Und was hat nicht die Trunkenheit für unangenehme Folgen im geſellſchaftlichen Leben, wo es nur gar zu oft zu unnützen Wortwechſeln, oder zum würklichen Handgemenge kommt! Wie reimen ſich aber ſolche Dinge zu einem Geſchäfte, das gros und edel iſt, zu einem Mann, der eine erhabene Denkungsart, und edle Sitten an ſich tragen ſoll? Erinnern Sie ſich alle Tage Ihrer Beſtimmung, und thun Sie diß, ſo wird Ihnen jede Viertelſtunde koſtbar ſeyn, Ihrem künftigen Beruf würdiglich entgegen zu wandlen; ja Sie werden die Zeit für verloren achten, die Sie durch allzugroßen Hang zum Spiel und andern Vergnügen verſchwenden ſollen.

Nur noch Eine Ermahnung! — Waffnen Sie ſich, lieben Freunde! wider das herrſchende Gift der Befleckung; — — dann die Sünde ruhet vor der Thüre.

Was ich geſagt habe, hab ich als Freund meinen Freunden geſagt.

Wer aber überdiß noch Ohren hat zu hören, der höre!

Innhalt.

Innhalt.

I. Einleitung in die Mathematik überhaupt. §. 1—23.

II. Rechenkunſt.

1. Ganze Zahlen. §. 24—55.
2. Potenzen. §. 56—63.
3. Brüche überhaupt. §. 64—90.
4. Entgegengeſetzte Größen. §. 91—110.
5. Buchſtabenrechnung. §. 111—183.
6. Decimalbrüche. §. 184—187.
7. Sexageſimalbrüche. §. 188.
8. Quadrat- und Cubikwurzeln. §. 189—210.
9. Verhältniſſe. §. 211—220.
10. Proportionen. §. 221—245.
11. Genannte Zahlen. §. 246—252.
12. Regel de Tri. §. 253—264.
13. Progreſſionen. §. 265—283.
14. Logarithmen. §. 284—293.
15. Gleichungen. §. 294—297.
16. Höhere Aufgaben. §. 298—311.

III. Geometrie.

1. Elementargeometrie. §. 312—656.
2. Praktiſche Geometrie.
   a) Feldmeßkunſt. §. 657—699.
   b) Markſcheidekunſt. §. 700—704.

IV.

IV. Trigonometrie.

Ebene Trigonometrie. §. 705.

a. Sinus. Coſinus. Tangente. Cotangente. Secante. Coſecante. §. 706 — 741.

b. Allgemeine Theorie, der trigonometriſchen Rechnung. §. 742 — 749.

c. Erfindung der Sinus von den Summen und Differenzen der Bogen aus den gegebenen Sinuſſen und andern trigonometriſchen Linien. §. 750 — 755.

d. Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreiecks. §. 756 — 761.

e. Anwendung auf Polygone. §. 762 — 764.

f. Berechnung der Sinus und Logarithmen. §. 765 — 771.

V. Fragmente aus der höhern Mathematik. §. 772 — 779.

Einlei-

Einleitung
in die
Mathematik
überhaupt.

Einleitung
in die Mathematik überhaupt.

§. 1. Schon in den älteſten Zeiten gab es, beſonders unter den Egyptern, Leute, die ſich mit Ausmeſſung der Felder, Länder und anderer Gegenſtände beſchäftigten, und die erſten Gründe der Geometrie ausdachten. Die Griechen brachten dieſe Verſuche in ein Syſtem, und gaben ihm Vorzugsweiſe den Namen Matheſis (Mathematik), welches in ihrer Sprache ſoviel, als Wiſſenſchaft, bedeutet.

§. 2. Die Mathematik iſt zwar weder die einige, noch die vornehmſte Wiſſenſchaft; ſie bringt aber, wenn man ſie als Vorbereitung zu andern Wiſſenſchaften treibt, einen reellen und bleibenden Nutzen. Sie heitert den Kopf auf, fördert und gründet die Ordnung im Denken, übt die Aufmerkſamkeit, erweckt deutliche Begriffe, und bringt die Fähigkeit, neue Wahrheiten zu erfinden, zu einer höhern Stufe. Wer in den übrigen gelehrten Wiſſenſchaften, worunter auch die Wundarzneikunſt gehört, bald weiter kommen will, lerne zuvor Mathematik!

§. 3. Mathematik, im weſentlichen Verſtand, iſt eine Wiſſenſchaft der Gröſſen.

§. 4. Eine Gröſſe heißt, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig iſt. Dieſe Eigenſchaft alſo unterſcheidet Dinge, bey denen man ſonſt nichts Unterſchiedenes betrachtet, z. E. eine Menge Ducaten von einer andern, die alle einerlei Gepräge und Gewicht haben.

§. 5. Wie groß ein Ding ſei, entdeckt uns entweder die unmittelbare Vorſtellung, die wir von dem Ding ſelbſt haben, oder die Vergleichung mit einer andern bekannten Gröſſe. Wer eine Meile gereiſet iſt, hat einen Begriff von der Länge des Wegs, den man ſo nennt, durch die Empfindung erhalten; und wenn er tauſend Meilen nennen hört, ſo ſtellt er ſich dieſen Weg tauſendmal aneinander geſetzt vor.

§. 6. Die Weite zweier Oerter von einem dritten miteinander zu vergleichen, pflegt man jede durch Meilen auszudrücken. Die Meile iſt hier ein Maaß, eine Gröſſe, die man als bekannt anſieht, und unterſucht, wie vielmal ſie in jeder der andern Gröſſen enthalten iſt. Dieſes Verfahren heißt meſſen. Zuweilen muß man auch angeben, was für Stücke des Maaßes in dem Gemeſſenen enthalten ſind.

§. 7. Unmittelbare Meſſungen ſind leicht; aber eine Gröſſe mit einem gegebenen Maaße zu vergleichen

gleichen, ohne daß man das Maaß würklich an die Gröſſe bringt, iſt ſchwerer.

In dieſem letztern Fall muß man Begriffe von Größen haben, woraus ſich ihre Vergleichung durch Schlüſſe herleiten läßt, ob man ſie gleich nicht unmittelbar mit den Sinnen empfindet.

§. 8. Die mathematiſche Erkenntniß der Gröſſe läßt ſich in eine gemeine und gelehrte abtheilen. Aber wenn die gelehrte ſoll angewandt werden, ſo iſt die gemeine unentbehrlich, und wird durch die gelehrte oft vollkommener.

§. 9. Die Gröſſe läßt ſich von allen andern Eigenſchaften einer Sache abgeſondert betrachten: und dieß thut die reine oder abgeſonderte Mathematik; oder man betrachtet zugleich die andern Eigenſchaften der Sachen mit, bey denen ſich die Gröſſe befindet, wie in der angewandten Mathematik. Eine Länge von 10 Meilen, blos als eine Länge betrachtet, gehört in die reine Mathematik; als die Entfernung zweier Oerter auf der Erde betrachtet, in die angewandte.

§. 10. Man kann die Gröſſe blos als eine Menge von Theilen, als ein Ganzes, betrachten; oder man kann zugleich auf die Verbindung und Ordnung dieſer Theile ſehen, welche ein gewiſſes zuſammengeſetztes Ding ausmacht. In jener Betrachtung gehört ſie für die Arithmetik, in dieſer für die Geometrie. Will man einen Klumpen Bley blos zum Gewichte gebrauchen, ſo

iſt ſeine Geſtalt völlig gleichgültig, wenn nur kein Bley davon, und keins dazu kommt; aber eine Bleykugel bleibt zu dem Gebrauch, zu dem ſie beſtimmt iſt, nicht mehr dienlich, wenn man aus ihr Schrot gieſſen wollte.

§. 11. Das Ganze iſt mit ſeinen Theilen einerlei, oder man kann, ohne Abgang der Gröſſe, alle Theile ſtatt des Ganzen, oder umgekehrt, ſetzen; alle Theile des Zuſammengeſetzten aber ſind mit dem Zuſammengeſetzten nicht einerley, wenn ſie nicht in der gehörigen Verbindung ſtehen. Ueberhaupt ſind von der Größe nachſtehende Sätze zu merken, worauf die wichtigſten Entdeckungen in der Mathematik beruhen.

I. Eine jede Gröſſe iſt ſich ſelber gleich, und eine jede Gröſſe iſt ihren würklichen Theilen zuſammen genommen gleich.

$$8 = 8$$
$$8 = 5 + 3$$

II. Wenn zwo Gröſſen einer dritten gleich ſind, ſo ſind ſie einander ſelber gleich.

$$6 = 4 + 2$$
$$6 = 5 + 1$$

folglich iſt $5 + 1 = 4 + 2$

III. Wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, ſo kommt Gleiches heraus.

$$8 = 6 + 2$$
$$4 = 4$$
$$8 + 4 = 6 + 2 + 4$$

Wenn

Wenn man aber Gleiches zu dem Gröſſeren, und zu dem Kleinern addirt, ſo iſt die Summe im erſten Fall gröſſer, als in dem andern.

$$a)\ \begin{array}{c}9\\4\\\hline 13\end{array}\qquad b)\ \begin{array}{c}5\\4\\\hline 9\end{array}$$

IV. Wenn man Gleiches von Gleichem ſubtrahirt, ſo bleibt Gleiches übrig.

$$\begin{array}{c}9 = 7 + 2\\ 6 = 6\\\hline 9 - 6 = (7 + 2) - 6 = 3\end{array}$$

Wenn man aber Gleiches von dem Gröſſeren und Kleineren ſubtrahirt, ſo bleibt in dem erſteren Fall mehr übrig, als in dem andern.

$$a)\ \begin{array}{c}9\\4\\\hline 5\end{array}\qquad b)\ \begin{array}{c}5\\4\\\hline 1\end{array}$$

V. Wenn man Gleiches mit Gleichem multipliciret, ſo kommt Gleiches heraus.

$$\begin{array}{c}4 = 3 + 1\\ 2 = 2\\\hline 4 \,.\, 2 = (3 + 1) \,.\, 2 = 8\end{array}$$

Wenn man aber das Gröſſere und das Kleinere durch Gleiches multiplicirt, ſo iſt das Product im erſten Fall gröſſer, als in dem andern.

$$a)\ \begin{array}{c}9\\4\\\hline 36\end{array}\qquad b)\ \begin{array}{c}5\\4\\\hline 20\end{array}$$

VI. Wenn man Gleiches mit Gleichem dividirt, ſo kommt Gleiches heraus.

$$\begin{array}{c}8 = 6 + 2\\ 4 = 4\\\hline 8 : 4 = (6 + 2) : 4 = 2\end{array}$$

Wenn man aber das Gröſſere und das Kleinere durch Gleiches dividirt, ſo iſt der Quotient in dem erſten Fall gröſſer, als in dem andern.

$$a)\ \frac{25}{5} \qquad b)\ \frac{20}{5}$$

$$5 \qquad 4$$

VII. Was gröſſer oder kleiner iſt, als die eine von zweien gleichen Gröſſen, das iſt auch gröſſer oder kleiner, als die andere von ihnen.

$$6 = 5 + 1$$

$$2 < 6$$

folglich iſt $2 < 5 + 1$

§. 12. Die Lehren der reinen Mathematik laſſen ſich alle zu einer von den (§. 10.) genannten Wiſſenſchaften, der Arithmetik oder Geometrie, bringen, ob man ſchon, der Bequemlichkeit halber, Abtheilungen derſelben mit Namen eigener Wiſſenſchaften belegt hat.

Die Arithmetik lehrt wie man aus einigen gegebenen Zahlen andere finden ſoll, von welchen eine Eigenſchaft, in Anſehung der gegebenen Zahlen, bekannt gemacht wird. Unter die Arithmetik gehören die Lehren von ganzen Zahlen, von Potenzen, von Brüchen, von entgegengeſetzten Größen, die Buchſtabenrechnung, die Rechnung mit zehen — und ſechzigtheiligen Brůchen, die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel, die Lehre von den Verhältniſſen, Proportionen, Progreſſionen, von genannten Zahlen, die Regel de Tri, die Rechnung mit Logarithmen, die

Lehre

Lehre von einfachen Gleichungen, und von einigen höhern Aufgaben der praktiſchen Rechenkunſt.

Die Geometrie iſt eine Wiſſenſchaft des Raums, den die körperlichen Dinge nach ihrer Länge, Breite und Dicke einnehmen.

Die Trigonometrie lehrt die unbekannten Seiten oder Winkel eines Dreiecks berechnen, und wird nach Verſchiedenheit der Dreiecke in die ebene und ſphäriſche Trigonometrie eingetheilt. Von allen dieſen Theilen wird in dieſem Compendium, die ſphäriſche Trigonometrie ausgenommen, ausführlicher gehandelt werden. Aus der höhern Mathematik werden nur Fragmente gegeben.

§. 13. Die angewandte Mathematik erhält ihren Nahmen daher, daß ſie die Lehren der reinen Mathematik auf die würklichen Sachen ſelbſt anwendet, und hat keine andere Gränzen als die Welt, auch kann ſie ſoviel Wiſſenſchaften enthalten, ſo vielerlei Gegenſtände es giebt, bey denen ſich Gröſſen durch Schlüſſe beſtimmen laſſen.

§. 14. Die gewöhnlichſten Gegenſtände dieſer Art ſind: die Kräfte der Körper, das Licht und die himmliſchen Körper. Dieſes gibt drey Theile der angewandten Mathematik, nemlich die Mechanik, Optik, Aſtronomie. Jeder begreift ſo viel unter ſich, daß man ihn in neue Theile zergliedert.

§. 15. Die Mechanik betrachtet die Körper entweder in ihrer Bewegung, oder im Gleichgewicht. Iſt jenes, ſo bleibt ihr der Nahme Me-

chanik; iſt dieſes, ſo heißt ſie Statik. In der Hydroſtatik wird das Gleichgewicht flüſſiger, blos ſchwerer Körper; in der Hydraulik die Bewegung dieſer Körper; und in der Aerometrie die Beſchaffenheit elaſtiſcher, flüſſiger Körper abgehandelt.

§. 16. Licht, das gerade fortgeht, iſt der Gegenſtand der Optik; Licht, das von Spiegeln zurückgeworfen wird, iſt der Gegenſtand der Katoptrik; Licht, das in durchſichtigen Materien gebrochen wird, iſt der Gegenſtand der Dioptrik.

§. 17. Die Eintheilung des Raums und der Zeit auf der Erden muß man vom Himmel erlernen. Den Raum betrachtet man in der mathematiſchen Geographie, die Zeit, wenn von einzelnen Tagen die Rede iſt, in der Gnomonik, und wenn von Jahren, Jahrhunderten, Jahrtauſenden geſprochen wird, in der Chronologie.

§. 18. Die Geſchützkunſt, die bürgerliche Baukunſt und die Kriegsbaukunſt werden auch zur Mathematik gerechnet, ohnerachtet zu ihrer Ausübung noch eine Menge Kenntniſſe, die nicht mathematiſch ſind, erfordert werden.

§. 19. Die Muſik oder Lehre von den Würkungen des Schalls haben unſere Vorfahren als einen beträchtlichen Theil der Mathematik angeſehen, und auch viele neuere Mathematiker haben ſich mit ihr beſchäftiget.

§. 20.

§. 20. Die Schiffkunſt, welche den Weg eines Schiffs auf dem Meer beſtimmen lehrt, kann mit zur Geographie gerechnet werden; aber die Regierung des Schiffs durch den gehörigen Gebrauch ſeiner Theile beruht auf der Mechanik.

§. 21. Die Mathematik erſtreckt ſich ſogar weiter, als auf blos ſinnliche Dinge. Wahrſcheinlichkeiten und Hofnungen hat ſie zu berechnen angewieſen, und beurtheilt nach ihren Regeln das Wachsthum eines Staates an Bürgern.

§. 22. Wenige menſchliche Verrichtungen ſind, von denen nicht ein Theil auf mathematiſchen Gründen beruhte. Alle Werkzeuge der Handwerker und Künſtler ſind Maſchinen, von deren Beſchaffenheit und Gebrauch die mathematiſche Kenntniß richtiger urtheilen lehrt. Die Zeichenkunſt und Perſpectiv ſind das Mathematiſche der Mahlerkunſt, ſo wie die Eigenſchaften der Farben, die Würkungen ihrer Miſchung, und ihrer Dauerhaftigkeit das Phyſiſche ſind. Aus allen angezeigten Theilen der angewandten Mathematik, ſind Statik, Hydroſtatik, Aerometrie, Hydraulik, Optik, Catoptrik, Dioptrik und Perſpectiv, die nothwendigſten für den Wundarzt.

§. 23. Wer die erſten Gründe der reinen Mathematik genau inne hat, faßt die Theile der angewandten Mathematik mit leichterer Mühe.

Aber

Aber Aufmerkſamkeit, welche der Anfang zur Gelehrſamkeit iſt, Fleiß und Nachdenken ſind die Eigenſchaften eines Liebhabers der Mathematik. Wer nun vorzügliche, angebohrne Fähigkeiten hat, verſchiedene Verhältniſſe, Aehnlichkeiten und Gleichheiten einzuſehen und zu entdecken, der wird es in dieſer vortreflichen Wiſſenſchaft um ſo weiter bringen. Doch auch mittelmäßige Köpfe, wann ſie nur Fleiß anwenden, werden ihren Zweck, obgleich ſpäter, erreichen. Wer aber in dem Vorurtheil ſteht, daß ihn die Mutter Natur zu nichts anderem, als zu Schröpfen, Aderlaſſen und Barbieren beſtimmt habe, der wird weder A noch B lernen;

— — er will es nicht verſtehen,
ſein Feind mag ſich mit ſolchen Büchern
quälen!

Rechenkunſt.

I. Rechenkunſt oder Arithmetik.

Erſter Abſchnitt.

Von ganzen Zahlen.

§. 24. Was die Rechenkunſt ſei, iſt oben §. 12. geſagt worden, und kann durch folgendes Exempel erläutert werden. Z. E. ich ſoll eine Zahl finden, die ſo groß iſt, als 6 und 8 zuſammengenommen, nemlich 14.

§. 25. Diejenigen Dinge, die eine Zahl ausmachen ſollen, müſſen Dinge von einer Art ſeyn.

§. 26. Dinge von einer Art ſind ſolche, bey denen bloß dasjenige betrachtet wird, was ſie mit einander gemein haben z. E. drey Spanier und zween Deutſche, als **Europäer** betrachtet; in ſo fern dieſe aber zu verſchiedenen Nationen **Europens** gerechnet werden, gehören ſie unter Dinge von verſchiedener Art.

§. 27. Dasjenige, was die Dinge, die zuſammen gezählt werden, gemein haben, heißt die **Einheit**. Eine Zahl heißt demnach eine **Menge von Einheiten**. Die drey Spanier und zween

Deutſche

Deutſche ſind 5. Europäer; (§. 26.); bey dieſer Zahl 5 iſt alſo die Einheit ein Europäer.

§. 28. Eine Zahl wird vermehrt oder vermindert, wenn ſolche Einheiten, aus denen ſie beſteht, zu ihr geſetzt, oder von ihr genommen werden.

§. 29. Wenn nach Gefallen zu einer Zahl eine oder mehr andere, die jener nicht gleich ſind, geſetzt werden, ſo heißt dieſe Vermehrung die Addition; die Zahl, welche allen zuſammengenommenen gleich iſt, die Summe; die gegebene Zahlen aber die ſummirenden.

§. 30. Eine Zahl zu wiederholtenmalen zu ſich ſelbſt addiren, heißt ſie multipliciren. Was herauskommt, heißt das Produkt oder das Factum; die Zahl, welche multiplicirt wird, und die, mit welcher multiplicirt wird, heiſſen gemeinſchaftlich Factoren.

§. 31. Der eine Factor iſt alſo in dem Product ſo oft enthalten, als die Einheit in dem andern Factor enthalten iſt; und es iſt gleichgültig, welcher Factor zuerſt geſetzt wird, dann ihr Product wird auch bey veränderter Ordnung immer einerlei ſeyn.

§. 32. Von einer gegebenen Zahl eine andere nach Belieben wegnehmen, heißt ſubtrahiren, oder abziehen. Die Zahl, von welcher weggenommen wird, heißt die zu vermindernde Zahl; die Zahl, welche weggenommen wird, nennt man die

abzu-

abzuziehende Zahl, was übrig bleibt, heißt Differenz, Unterſchied, Ueberſchuß.

§. 33. Dividiren heißt eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen Zahl ſo oft abziehen, als es möglich iſt. Oder auch mit andern Worten: aus zwo gegebenen Zahlen eine Zahl finden, welche andeutet, wie vielmal die eine von den gegebenen in der andern enthalten iſt. Jener Ausdruck wird bei dem Dividiren unter ſich, dieſer bei dem Dividiren über ſich deutlicher. Die Zahl, welche dividirt, heißt Diviſor; die Zahl, welche dividirt wird, Dividendus, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Diviſor ſich vom Dividendus habe abziehen laſſen, oder in demſelben enthalten ſei, Quotient.

§. 34. Der Diviſor muß in dem Dividendus ſo oft enthalten ſeyn, als die Einheit im Quotienten. Oder: wenn der Diviſor gröſſer iſt, ſo iſt der Dividendus im Diviſor ſo oft enthalten, als der Quotient in der Einheit.

§. 35. Das Product des Diviſors in dem Quotienten gibt den Dividendus, und das Product durch einen Faktor dividirt, gibt den andern Faktor.

§. 36. Drey Hauptſätze ſind in der Mathematik beſonders zu merken, nemlich der Satz der Aehnlichkeit, der Gleichheit und der Congruenz. 1) Alle Dinge ſind einander ähnlich, in ſo fern ſie in Anſehung ihrer Beſchaffenheiten mit einander über-

einkommen, und durch Nichts, als durch die Größe von einander unterſchieden werden. Ein Sohn kann ſeinem Vater vollkommen ähnlich ſeyn, ungeachtet jener noch ein Kind, und dieſer ein Mann iſt. Oder man nehme ein Modell von einem Gebäude. Dieſes Modell kann im Kleinen eben die Eintheilung und das Verhältniß der Theile haben, wie das Gebäude im Großen; da ſie alſo nur durch die Größe von einander unterſchieden ſind, ſo iſt das Gebäude und das Modell einander ähnlich. 2) Nur ſolche Dinge ſind einander gleich, die blos in der Größe mit einander übereinkommen, ſie mögen übrigens in ihren Beſchaffenheiten von einander unterſchieden ſeyn, wie ſie wollen. Wenn ein Bogen Papier in Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, u. ſ. w. zerſchnitten worden, ſo iſt dennoch, wenn nichts davon verlohren geht, die Summe aller dieſer Theile dem vorigen Bogen Papier gleich, und nimmt wieder eben ſo viel Platz ein, ungeachtet eine groſſe Unähnlichkeit herauskommt. So giebt es auch Dinge, die dem Werth nach einander gleich, unerachtet ſie ſonſt in allen andern Stücken höchſt unähnlich ſind. Ein Ducaten iſt dem Werth nach fünf Gulden Silbergeld gleich, und doch iſt zwiſchen einem Ducaten und fünf Gulden Münz nichts ähnliches. 3) Sachen oder Figuren, die gleich und ähnlich ſind, ſind vollkommen übereinſtimmend. Die aus dieſen Sätzen gezogenen Folgen ſind in der Mathematik von Nutzen; dann, wenn

z. E.

z. E. von gleichen Sachen die Rede iſt, ſo darf man allemal Gleiches für Gleiches ſetzen; eben ſo handelt man in ähnlichen Dingen.

§. 37. Wer Mathematik lernen will, muß ihre Sprache verſtehen. Zur mathematiſchen Sprache rechnet man vorzüglich die Zeichen. Dieſe Zeichen ſind folgende:

$=$ iſt das Zeichen der Gleichheit, z. E. 6 und $2=8$, ſechs und zwey iſt gleich acht.

$\backsim$ iſt das Zeichen der Aehnlichkeit, z. E. $o \backsim O$, ein kleines o iſt ähnlich einem groſſen O.

$\cong$ iſt das Zeichen der Congruenz oder der völligen Uebereinſtimmung, ſowohl in Anſehung der Aehnlichkeit als Gleichheit, z. E. 2 Ducaten von einem Schlag ſind in der Mathematik congruent.

$\neq$ iſt das Zeichen der Ungleichheit.

$\not\backsim$ iſt das Zeichen der Unähnlichkeit.

$\not\cong$ iſt das Zeichen der Discongruenz.

$>$ iſt das Zeichen deſſen was gröſſer iſt, z. E. $4 > 3$, vier iſt gröſſer, als drey.

$<$ iſt das Zeichen deſſen, was kleiner iſt, z. E. $2 < 5$, zwey iſt kleiner als fünf.

0 iſt das Zeichen deſſen, was keine Gröſſen hat, oder, was mathematiſch unendlich klein iſt, z. E. $\frac{1}{\infty} = 0$, eins dividirt ins Unendliche, wird Nichts, oder iſt unendlich klein.

∞ iſt das Zeichen deſſen, was mathematiſch unendlich groß iſt. (Mathematiſch unendlich wird genannt, was man nicht beſtimmen kann, oder nicht beſtimmen will.)

$+$ iſt das Zeichen der Addition, und wird durch plus (mehr) bezeichnet; z. E. $4 + 3 = 7$, vier plus drey iſt gleich ſieben.

$-$ iſt das Zeichen der Subtraction, und wird durch Minus (weniger) ausgedruckt, z. E. $4 - 1 = 3$, vier weniger eins iſt gleich drey.

. oder $\times$ iſt das Zeichen der Multiplication, z. E. $6 . 3$ oder $6 \times 3 = 18$, ſechs multiplicirt mit drey iſt gleich achtzehen.

: oder ein Strich zwiſchen zwoen Zahlen iſt das Zeichen der Diviſion z. E. $6 : 2 = 3$ oder $\frac{6}{2} = 3$, ſechs dividirt durch zwey iſt gleich drey.

$\surd$ iſt das Zeichen der Wurzeln.

Vom Ausſprechen und Schreiben der Zahlen.

§. 38. Man gebe jeder der erſten zehen Zahlen einen eigenen Namen. Jede größere Zahl iſt entweder die Summe einer kleinern und der zehen, oder ein Vielfaches der zehen, oder die Summe eines Vielfachen und einer kleinern; und dieſe Mannigfaltigkeit zeige man durch die verſchiedene Art, ihre Namen zu bilden, an, z. B. Neunzehen; Neunzig; Neun und neunzig. Um Unordnungen vorzubeugen, nenne man zehnmalzehn Hundert; zehnmalhundert Tauſend; Tauſendmaltauſend Million; Millionenmalmillion Billion; Millionenmalbillion Trillion; Millionenmaltrillion Quadrillion u. ſ. w.

§. 39. Damit man durch die bekannten Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, auch die Zehner, Hunderte, Tauſende u. ſ. w. andeuten könne, ſo gebe man ihnen ihre Bedeutung von der Stelle, oder, wann ich ſo ſagen darf, von dem Fach, in welchem ſie ſtehen. Nemlich, wann ſie entweder allein, oder in der erſten Stelle oder Fach zur Rechten anzutreffen ſind, ſo bedeuten ſie Einer, in der andern Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tauſende, in der fünften Zehntauſende, in der ſechsten Hunderttauſende, in der ſiebenten Millionen u. ſ. w. Die leeren Stellen oder Fächer werden mit der Nulle (0) vollgefüllt, welche andeutet, daß in denſelben keine Zahl anzutreffen ſey. Ich ſoll z. E. Ein tauſend drey hundert und ſechs und achtzig ſchreiben, ſo ſeze ich in das erſte Fach zur Rechten die Einheiten mit 6; in das zweyte Fach die Zehner mit 8; in das dritte Fach die Hunderte mit 3; in das vierte Fach die Tauſende mit 1, und bekomme alſo 1386. In jedem Fach gelten alſo die Zahlen zehenmal ſo viel, als in dem vorhergehenden.

§. 40. Wann man die Zahl 7356428 ausſprechen will, ſo fängt man von der rechten Hand an und ſagt: es ſind 8 Einheiten, 2 Zehner, 4 Hunderte, 6 Tauſende, 5 Zehentauſende, 3 Hunderttauſende, 7 Tauſendmaltauſende, oder 7 Millionen. Um ſich kürzer auszudrücken, leſe man ſie von vornen, nachdem man obige Zahl von der Rechten an

gegen die Linke vermittelſt kleiner Strichlein in Claſſen getheilt, und einer jeden Claſſe 3 Stellen zugeeignet hat. Am Ende gegen die Linke mögen drey oder weniger bleiben. Ueber die Zahl, welche nach dem andern Strichlein kömmt, mache man einen Punkt, und über die, ſo nach dem vierten Strichlein folgt, zween Puncte u. ſ. w. Ein bloſſes Strichlein (,) wird durch Tauſend, ein Punkt durch Million, zween Punkte durch Billion u. ſ. w. ausgeſprochen, hingegen die erſte Zahl gegen die Linke in einer Claſſe durch Hundert, die mittlern durch Zehner, und die letzte durch Einer. Dem zu Folge wird das gegebene Exempel alſo abgetheilt und ausgeſprochen:

7˙,356,428, ſieben Millionen, drey hundert ſechs und fünfzigtauſend, vierhundert und acht und zwanzig.

Eben ſo läßt ſich eine Zahl ausſprechen, die mit Nullen vermengt iſt, z. E. 302˙,004,603 enthält 3 Einheiten, keinen Zehner, 6 Hunderte, vier Tauſende, keinen Zehentauſender, keinen Hunderttauſender, 2 Millionen, keinen Zehner von Millionen, 3 Hunderte von Millionen. Ließt man ſie von vornen, ſo ſind es dreyhundert und zwo Millionen, viertauſend, ſechshundert und drey.

Vier Species der Rechenkunſt.

a) Addiren.

§. 41. Wenn man verſchiedene Zahlen zuſammen addirt, ſo ſchreibt man entweder die Zahlen, die man addiren will, ſo unter einander, daß Ziffern einerley Ordnung untereinander kommen, zählt die Ziffern zuſammen, die in einer Reihe untereinander ſtehen, und ſchreibt die niedrigſte Ziffer jeder ſolcher Summe unter die Reihe, von welcher die Summe herrührt, und addirt dieſe einzelne Summen wieder, um die Hauptſumme zu erhalten; z. E.

```
678345
  5321
  4894
------
    10
   15
  14
 17
67
------
688560
```

oder man zählt die Ziffer jeder Ordnung zuſammen, und wenn die Summe einer jeden Reihe mehr als 9 beträgt, ſo wird für jede Zehen eine Eins in die nächſt höhere Stelle geſchrieben, zu dieſer addirt, die andere Zahl der Summe aber unter den Strich geſetzt, z. E.

```
678345
  5321
  4894
------
688560
```

b) Subtrahiren.

§. 42. Eine kleinere Zahl wird von einer gröſſern abgezogen, wenn man die Zahlen ſo untereinander ſchreibt, daß Einheiten auf Einheiten, Zehner auf Zehner, Hunderte auf Hunderte, oder wenigſtens auf ihre Stellen, wenn Nullen da ſind, zu ſtehen kommen, da man alsdann von der Rechten zur Linken die Einheiten, Zehner u. ſ. w. ſubtrahirt, bis alles abgezogen iſt, was man verlangt. Bey der Subtraction kommen 5 Fälle vor:

I. Wenn alle untere Zahlen kleiner ſind, als die obern, z. E.

$$\begin{array}{r} 3648 \\ 2125 \\ \hline 1523 \end{array}$$

5 von 8 abgezogen läßt 3 Einheiten, 2 von 4 zweier Zehner, 1 von 6 fünf Hunderte, und 2 von 3 einen Tauſender.

II. Wenn die untern Zahlen theils kleiner, theils gleich groß ſind mit der obern, und noch überdieß die untere Reihe weniger Zahlzeichen hat, z. E.

$$\begin{array}{r} 5482 \\ 472 \\ \hline 5010 \end{array}$$

III. Wenn in der untern Zahl einige gröſſere Zahlzeichen ſind, als in der obern, ſo muß man von den höhern Stellen entlehnen.

65'3'2
249

6283

da 9 von 2 ſich nicht abziehen läßt, ſo entlehnt man aus der Stelle der Zehner eine Einheit, die hernach 10 giebt; dieſe 10 zu den 2 addirt, macht 12, alſo 9 von 12 läßt 3. Da nun die Zahl 3, die eins durchs Entlehnen verlohren hat, zwey worden iſt, ſo kann man 4 von 2 nicht abziehen, ſondern entlehnt aus der Stelle der Hunderte von 5 eine Einheit, und ſagt 4 von 12 läßt 8 u. ſ. w.

IV. **Wenn Nullen theils oben, theils unten vorhanden ſind.**

604'02
50061

10341

1 von 2 bleibt 1; ſechs von 0 geht nicht, man entlehnt alſo aus dem Fach der Hunderte 1, welches nun in dem Zehnerfach zehen Zehner macht, wovon man die untenſtehende 6 Zehner abzieht, alſo 6 von 10 läßt 4; 0 von 3 läßt 3. (Dann 4 iſt beym Entlehnen um 1 vermindert worden); 0 von 0 bleibt 0; 5 von 6 läßt 1.

V. **Wenn oben mehrere Nullen nach einander vorhanden ſind.**

7'0'0'2'0'0'4
1003025

5998979

5 von 4 läßt ſich nicht abziehen, und weil nächſt vorher Nullen ſind, ſo entlehnt man aus der Stelle der Tauſende eine Einheit. Dieſe Einheit trägt man zuerſt gleichſam in das Fach der Hunderte, läßt daſelbſt 9 Hunderte zurück, und Hundert trägt man in das Fach der Zehner; hier bleiben abermals 9 Zehner zurück, und einen Zehner bringt man nun-

mehr in das Fach der Einheiten, und ſagt: 5 von 14 läßt 9; 2 Zehner von den vorher zurückgelaſſenen 9 Zehner laſſen 7; 0 von 9 vorhin zurückgelaſſenen Hunderten läßt 9; 3 von 1 geht nicht an, man entlehnt alſo, da nächſt vorher Nullen kommen, aus der Stelle oder Fach der Millionen, verfährt wie ſchon geſagt, und ſagt, 3 von 11 läßt 9; 0 von 9 läßt 9; 1 von 6 läßt 5. Hieraus iſt alſo zu ſehen, warum alle Nullen, über welche man im Entlehnen hinweggegangen, zu Neunern werden.

§. 43. Wenn man die Differenz und die abzuziehende Zahl wieder zuſammen addirt, ſo kommt die zu vermindernde Zahl wieder heraus. Auf dieſe Weiſe dienen Addition und Subtraction einander zur Probe.

addirt	678345.	Differenz.
	10215.	die abzuziehende Zahl.
	688560.	die zu vermindernde Zahl.

c) Multipliciren.

§. 44. Will man das Einmal Eins, oder eine Tabelle verfertigen, in welcher alle Producte zu finden ſind, die herauskommen, wenn man die Einer durcheinander multiplicirt, ſo theilt man die Seite einer viereckigten Figur in 9 gleiche Theile, und zerſchneidet ſie durch Querſtriche in lauter kleine Fächer. Oben in der erſten Reihe und zur Linken ſchreibt man die Zahlen von 1 bis 9 in ihrer natürlichen Ordnung, addirt 2 zu

ſich

ſich ſelbſt, und ſetzt das Product 4 unter die 2; dazu addirt man noch 2, ſo iſt 6 das Product aus 3 in 2; zu 6 addirt man noch einmal 2, ſo iſt 8 das Product aus 2 in 4 u. ſ. w. Auf gleiche Weiſe kann man die übrige Zahlen finden, und in ihre gehörige Fächer ſchreiben, ſo iſt das Einmal Eins fertig, welches man, wenn man im Multipliciren und Dividiren hurtig fortkommen will, auswendig lernen, oder jederzeit bey der Hand haben muß. Will man die Producte wiſſen, ſo darf man nur die eine Zahl nach der Breite, und die andere nach der Länge, aber im erſten Reihen der Vierecke, aufſuchen und die auf beyde Zahlzeichen in geraden Linien ſich beziehende Zahl ſuchen, ſo wird man das Product finden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 45. **Zwo Zahlen werden mit einander multiplicirt, wenn man I.) die Einheiten, Zehner,** Hun-

Hunderte u. ſ. w. des einen Factors mit eben dieſen Ordnungen des andern Factors multiplicirt, und die einzelnen Producte addirt, oder II.) die Einheiten, Zehner, Hunderte im Sinn behält.

a) Wenn der eine Factor nur Ein Zahlzeichen iſt.

Iſtes Exempel	IItes Exempel:
3428	3428
6	6
48	20568
12	
24	
18	
20568	

b) Wenn beyde Factoren mehrere Zahlen haben.

3452
346
20712
13808
10356
1194392

6. 2 gibt 12, ſetze 2 behalt 1; 6. 5 gibt 30 und 1 behalten 31, ſetze 1 behalt 3 u. ſ. w. Hernach multiplicirt man mit dem Factor der Zehner, und ſagt: 40. 2 ſind 80, oder 8 Zehner, ſetzt ſie in die Stelle der Zehner, läßt aber die Nulle weg u. ſ. w. Endlich multiplicirt man mit dem Factor der Hunderte, 300. 2 gibt 600, ſetzt 6 in die Stelle der Hunderte, und läßt beyde Nullen weg u. ſ. w. Addirt

Addirt man die einzelne Producte, ſo iſt die Summe das ganze Product.

§. 46. Wenn ein Factor am Ende Nullen hat, ſo wird nur mit den Zahlzeichen multiplicirt, z. E. 423. 200 = 84600; die Nullen werden nach geſchehener Multiplication erſt angehängt.

§. 47. Wenn ein Factor in der Mitte Nullen hat, ſo wird die nächſtfolgende Reihe um ſo viel Stellen hinaus gerückt, als Nullen in einem fort ſtehen, weil man ſonſt eine ganze Reihe Nullen ohne Noth ſchreiben müſte; denn die Stellen, die mit einer Nulle bezeichnet ſind, deuten an, daß in denſelben keine Zahl anzutreffen ſey. z. E.

```
   4235
    302
-------
   8470
 12705
-------
1278970
```

d) Dividiren.

§. 48. Eine Zahl wird durch eine andere kleinere dividirt, wenn man ſucht, wie vielmal der Diviſor in den höhern und niedern Ziffern des Dividendus enthalten iſt, und hernach die einzelnen Quotienten addirt.

Bey der Diviſion giebt es zween Hauptfälle:

a) Wenn der Diviſor nur eine Ziffer hat.

Man ſuche 1) wie vielmal der Diviſor in der höchſten Ziffer des Dividendus enthalten ſey. Diß geſchieht, wenn man aus dem Einmal Eins die

Ziffer aufſucht, welche mit dem Diviſor multiplicirt, ein Product gibt, das der höchſten Ziffer des Dividendus gleich, oder nächſt kleiner iſt. 2) Dieſe Ziffer ſchreibe man in die Stelle des Quotienten, und nach ihr ſo viel Nullen, als Ziffern im Dividendus nach der höchſten folgen. Dieſer gefundene Theil des Quotienten zeigt an, wie vielmal der Diviſor nach ſolchen Einheiten im Dividendus enthalten ſey, wie die Einheiten der höchſten Ziffer des Dividendus ſind, wie viel z. E. zehntauſende des **Diviſor** im **Dividendus** ſtecken. Weil alſo in der höchſten Ziffer des **Dividendus** noch viel vom Diviſors ſtecken kan, das nicht durch ſo groſſe Einheiten, wie die eben erwähnten, auszudrücken iſt, ſo multiplicire man 3) den gefundenen Theil des Quotienten mit dem **Diviſor**, und ziehe das Product von der Ziffer des Dividendus, in die man dividirt hat, ab. 4) Zu dem Reſt nehme man die nächſtfolgende Ziffer, und verfahre mit dem, was man auf dieſe Weiſe erhält, nach der erſten Regel. Die Ziffer, die heraus kommt, iſt der zweyte Theil des Quotienten, und nach ihr gehören ſo viel Nullen, als Ziffern im **Dividendus** nach der niedrigſten unter denen, in welche man dividirt hat, folgen. 5) Dieſe bißher bemeldte Arbeit wird ſo lang fortgeſetzt, als Ziffern im **Dividendus** vorhanden ſind. Jede neue Ziffer des Dividendus, die zu dem nächſt vorhergehenden Reſte genommen wird, gibt im Quotienten eine Ziffer, nach der ſo viel Nullen folgen, ſo viel Ziffern nach dieſer Ziffer im **Dividendus** zur rechten Hand ſtunden. 6) Da dieſe Nullen nur dienen, den Werth der Ziffern des Dividendus anzuzeigen, ſo hat man ſie bey der Ausübung nicht nöthig, weil die verſchiedene Ziffern des **Dividendus** nach einander ſelbſt dieſe Stellen ausfüllen.

Diviſ. 5|	97645. Dividend.	10000
	5	9000
	47645	500
	45	20
	2645	9
	25	19529 Quot.
	145	
	10	
	45	
	45	
	0	

b) Wenn der Diviſor mehr als eine Ziffer hat.

Man vergleiche 1) den Diviſor nach obigen Regeln allemal mit ſo viel Ziffern des Dividendus, als er ſelbſt hat. 2) Um dieſe Vergleichung anzuſtellen, und z. E. zu finden, wie vielmal 37 in 36 ſteckt, könnte man vorläufig 37 durch alle Zahlen von 1 bis 9 multipliciren, und alſo ein Einmal Eins für den Diviſor machen. 3) Wenn man dieſe Vergleichung nicht anſtellen mag, ſo ſuche man nur, wie vielmal die erſte Ziffer des Diviſors in der erſten des Dividendus ſteckt, und nehme an, daß der ganze Diviſor eben ſo vielmal in den ihm zugehörigen Ziffern des Dividendus ſtecke. Diß kann falſch ſeyn; es entdeckt ſich aber, wenn man den gefundenen Theil des Quotienten mit dem Diviſor multiplicirt, da dann das Product gröſſer kommen wird, als die Zahl, von der man es abziehen ſoll. Man muß alſo den Theil des Quotienten, der ſolchergeſtalt gefunden werden ſoll, ſo lang vermindern, bis das Product aus ihm in den Diviſor ſich abziehen läßt.

Diviſor. 25 | 786525 Dividendus. | 31461 Quot.

```
 75
 36
 25
 115
 100
 152
 150
  25
  25
   0
```

§. 49. Wenn der Diviſor in der höchſten Ziffer des Dividendus nicht einmal enthalten iſt, ſo nimmt man ſie zu der nachfolgenden, und wenn er in dem Reſte und der dazu kommenden neuen Ziffer nicht enthalten iſt, ſo ſchreibt man dafür eine 0 in den Quotienten, und nimmt zu dieſer Ziffer des Dividendus die nächſtfolgende.

Diviſor: 7 | 6314. Dividendus. 902 Quot.

```
 63
 014
  14
   0
```

§. 50. Wenn beym Dividiren etwas übrig bleibt, ſo enthält der Dividendus den Diviſor einigemal ganz, und noch etwas von ihm darüber, welches keinen ganzen Diviſor beträgt.

Diviſ.

Diviſ. 37 | 7654 Divid. | 206 $\frac{32}{37}$ Quot.

74

254

222

32

§. 51. Wenn am Ende des Diviſors Nullen ſtehen, ſo werden vom Dividendus ſo viel Zahlzeichen abgeſchnitten, als der Diviſor Nullen hat.

Diviſ. 2 | 00 | 32 | 48 Divid. | 16 $\frac{48}{200}$ Quot.

2

12

12

0

§. 52. Die Art, unter ſich zu dividiren, iſt die leichteſte, beugt aller Verwirrung vor, und iſt der Art, über ſich zu dividiren, immer vorzuziehen. Doch muß man auch dieſe leztere kennen, weil ſie in vielen Fällen von Nutzen iſt.

a)

44

Divid. 5945 | 1189 Quot.

Diviſ. 5555

5 in 5 iſt einmal; der Quotient 1 wird mit dem Diviſor 5 multiplicirt, von dem Dividendus abgezogen und darüber geſezt, oder wenn die Zahl aufgeht, eine Null, auch gar nichts über den Dividendus geſchrieben; 5 in 9 iſt einmal, 1 mal 5 iſt 5, 5 von 9 bleibt 4; 5 in 44 iſt 8 mal, 5 mal 8 iſt 40, bleiben 4; 5 in 45 iſt 9 mal.

b)

	(3	
	127(2	
Divid.	765 4	$206\frac{32}{37}$ Quot.
Diviſ.	377 7	
	33	

3 in 7 iſt 2 mal, 2 mal 3 iſt 6, 6 von 7 bleibt 1; 2 mal 7 iſt 14, 14 von 16 läßt 2; nun ſchreibt man den Diviſor 3 unter den vorigen Diviſor 7, und den Diviſor 7 unter den Dividendus 5, und ſagt: 3 in 2 Nullmal, ſezt die Nulle als den zweyten Quotienten, und da kein Abzug geſchehen kann, ſo bleibt 25 ganz. Nun wird der Diviſor zum 3tenmal unterſchrieben und auf ähnliche Art, wie bisher, verfahren.

c)

	(2	
	53	
	61(0	
Divid.	423 6	$68\frac{20}{62}$ Quot.
Diviſ.	62 2	
	6	

d)

1	
32(48	$16\frac{43}{200}$
22(00	

Bey c) iſt die erſte Zahl des Dividendus kleiner, als des Diviſors, deßwegen ſezt man den Diviſor um eine Stelle weiter gegen die rechte Seite. Bey d verfährt man laut §. 51.

§. 53. Wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multiplicirt, und, ſo etwas übrig geblieben iſt, zum Product addirt, ſo muß der Dividendus wieder herauskommen.

I. Quo-

I. Quotient. 1189 ⎫ ⎬ × Diviſor. 5 ⎭

Dividendus. 5945

II. Quotient. $206\frac{32}{37}$ ⎫ ⎬ × Diviſor. 37 ⎭

1442
618
32

Dividendus 7654

III. Quotient. $68\frac{20}{62}$ ⎫ ⎬ × Diviſor. 62 ⎭

136
408
20

Dividend. 4236

IV. Quot. $16\frac{48}{200}$ ⎫ ⎬ × Diviſor. 200 ⎭

3200
48

Dividendus. 3248

Auf die Nenner 37, 62, 200 wird bey der Probe nicht reflectirt, ſondern nur die Zähler dazu addirt, weil, wir z. E. im zweiten Exempel $\frac{32}{37}$ mit 37 multiplicirt, 32 Ganze ausmachen; dann 32 dividirt durch 37, oder $\frac{32}{32}$ multiplicirt durch 37 gibt 32.

§. 54. Wenn man das Product durch einen von den Factoren dividirt, ſo muß der andere Factor herauskommen.

a)

2̶1̶4̶
2ɸ8ɸɸ8. Prod.
ɸɸɸɸ

| 3428. (§. 2.)

b)

2̶1̶4̶
2ɸ8ɸɸ8. Pr.
3̶4̶2̶8̶

| 6. (§. 1.)

Multiplication und Diviſion dienen alſo einander gegenſeitig zur Probe.

§. 55. Eine Zahl durch Eins multiplicirt oder dividirt wird nicht verändert.

$$6 . 1 = 6; \quad 6 : 1 \text{ oder } \frac{6}{1} = 6.$$

Zweyter Abſchnitt.

Von den Potenzen.

§. 56. Ein Product aus zween gleichen Factoren heißt ein Quadrat und der Factor, der mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, deſſen Wurzel.

$$9 = 3 . 3$$

§. 57. Das Quadrat mit ſeiner Wurzel multiplicirt, gibt den Cubus oder Würfel, d. i. ein Product aus drey gleichen Factoren, deren jeder hier die Cubik-Wurzel heißt.

$$16 . 4 = 4 . 4 . 4 = 64.$$

§. 58. Ein Product aus lauter gleichen Factoren heißt eine Potenz des Factors, der in dieſem Product etlichemal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird. Der Grad der Potenz heißt die Menge von gleichen Factoren, und die Wurzel heißt einer dieſer Factoren.

§. 59. Man ſchreibt eine Potenz ſo, daß man oben an die Ziffer, welche die Wurzel andeutet, eine

eine kleine Ziffer ſezt, welche den Grad der Potenz anzeigt und der Exponent heißt.

$$9 = 3^2;\ 64 = 4^3$$

So iſt $625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$, welche Potenz die vierte, oder das Biquadrat heißt. Ingleichem iſt eine Million die ſechſte Potenz der 10 oder 16^6.

§. 60. Die **Wurzel** eines gewiſſen Grads aus einer Zahl ziehen, heißt dieſe Zahl als eine Potenz ſelbigen Grads anſehen, und die Zahl ſuchen, die ſo vielmal mit ſich ſelbſt multiplicirt, als der Grad der Potenz erfordert, die gegebene Zahl hervorbringt.

§. 61. Das Zeichen der Wurzel iſt $\sqrt{}$; den Exponenten der Wurzel ſchreibt man in die Oefnung des Wurzelzeichens, bey dem Quadrat aber, da er 2 ſeyn ſollte, läßt man ihn weg.

$$\sqrt{9} = 3;\ \sqrt[3]{64} = 4;\ \sqrt[4]{625} = 5;\ \sqrt[6]{1000000} = 10;$$

§. 62. Die Quadrate der einzelnen Ziffern ſtehen im Einmal Eins, und ihre Würfel laſſen ſich daraus leicht machen. Dieſes gibt folgendes Quadrat- und Cubiktäfelchen:

Wurz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Würf.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

§. 63. Wenn an einer oder mehr Ziffern rechter Hand Nullen ſtehen, ſo iſt ihr Quadrat das Quadrat der Ziffern mit noch einmal ſo viel Nullen, und ihr Würfel der Würfel der Ziffern mit dreymal ſo viel Nullen.

$$500^2 = 250000; \quad 500^3 = 125000000;$$

Dritter Abſchnitt.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 64. Wenn ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilt wird, und deren einige genommen werden, ſo heißt man einen oder mehrere Theile in Vergleichung mit dem Ganzen, einen Bruch. Z. E. ein Gulden enthält 2 Drittheile des Thalers.

§. 65. Man muß alſo wiſſen, in wie viele Theile das Ganze getheilt worden iſt, und wie viel deren auf den Bruch gehen. Das erſte zeigt der Nenner, das lezte der Zähler an. Jener gibt dem Bruche den Namen; dieſer zählt die Menge der Theile, die ihn ausmachen. Nimmt man einen dieſer Theile für die Einheit an, ſo wird der Bruch eine ganze Zahl, die ſo viel ſolche Einheiten hat, als der vorige Zähler anzeigte.

§. 66. Den Zähler ſchreibt man oben, den Nenner unten, ſo daß ein Querſtrich zwiſchen beyden Zahlen iſt. In dem Bruch $\frac{4}{7}$ iſt 4 der

Zähler

Zähler und 7 der Nenner. Es zeigt alſo an, daß das Ganze in 7 gleiche Theile getheilt worden, und daß man 4 ſolcher Theile genommen habe.

§. 67. Wenn der Zähler kleiner iſt, als der Nenner, ſo heißt der Bruch ein eigentlicher, ächter, wahrer Bruch. Z. E. $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{8}$ ſind eigentliche Brüche; wenn aber der Zähler größer iſt, als der Nenner, ſo heißt der Bruch ein uneigentlicher, falſcher Bruch. Z. E. $\frac{5}{4}$; $\frac{9}{7}$ ſind uneigentliche Brüche.

§. 68. Zur Beurtheilung der Größe eines Bruchs können folgende Sätze dienen: Je öfter 1) der Zähler im Nenner enthalten iſt, deſto kleiner iſt der Bruch, wenn man ihn mit einem andern vergleicht, deſſen Zähler im Nenner nicht ſo oft enthalten iſt. 2) Steckt der Zähler wenigemal im Nenner, ſo iſt der Bruch groß. 3) Wenn die Zähler in den Nennern gleichvielmal angetroffen werden, ſo ſind die Brüche einander gleich, z. E. $\frac{5}{72}$ iſt ein kleiner Bruch; $\frac{3}{4}$ iſt ein großer Bruch; $\frac{4}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{6}{9}$ ſind gleiche Brüche.

§. 69. Eine große ganze Zahl kann nicht in einer kleinen ganzen Zahl ſtecken; aber ein Stück der großen Zahl wird die kleine ausmachen. Um zu finden, wie viel dieſes Stück betrage, theile man jede Zahl in ihre Einheiten, und frage: wie viel Einheiten der großen Zahl die kleine ausmachen?

chen? Die kleine Zahl begreift demnach etliche Einheiten, als Theile der großen in ſich, und kann als ein Bruch von der großen angeſehen werden, deſſen Nenner die Menge der Einheiten der großen Zahl, und der Zähler die Menge der Einheiten der kleinen Zahl iſt. Der eigentliche Bruch $\frac{7}{12}$ zeigt demnach an, was für ein Stück der großen Zahl in der kleinen Zahl enthalten iſt. Er iſt alſo der Quotient, den die kleine Zahl mit der großen dividirt gibt, bey welcher Diviſion man nicht fragen kann: wie vielmal die große Zahl, ſondern was für ein Theil der großen Zahl in der kleinen enthalten iſt.

§. 70. Ein uneigentlicher Bruch begreift das Ganze ſo vielmal in ſich, ſo vielmal ſein Zähler den Nenner in ſich begreift, und iſt alſo der Quotient, den der Zähler mit dem Nenner dividirt gibt.

§. 71. Wenn der Zähler den Nenner etlichemal ganz und noch ein Stück darüber enthält, ſo läßt ſich ſolches Stück nach §. 69. ausdrücken ($\frac{17}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$) Da nun Brüche und Quotienten (nach §. 69. 70.) einerley ſind, ſo muß man, um den Quotienten zwoer ganzen Zahlen zu finden, den Quotienten, ſo genau man kann, in ganzen Zahlen ſuchen, und daran einen Bruch hängen, deſſen Zähler der Reſt iſt. Z. E.

$$7654 : 37 = 206 + \tfrac{32}{37} \quad (\S. 53.)$$

§. 72.

§. 72. Brüche bleiben unverändert, wenn man den Zähler und Nenner mit einer und eben derſelben Zahl multiplicirt. Dann, wenn beyde mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden, ſo iſt es eben ſo viel, als ob ſie mit 1 multiplicirt oder dividirt würden, weil $\frac{6}{6} = 1$ iſt (§. 55.). Oder: wenn der Zähler und Nenner mit einer und eben derſelben Zahl multiplicirt werden, ſo wird der Bruch durch die eine Multiplication um ſo viel größer, um ſo viel er durch die andere wieder kleiner wird, folglich muß er ungeändert bleiben. Z. E. $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{3} = \frac{15}{18}$. Eben diß gilt auch bey der Diviſion. Z. E. $\frac{6}{8} : \frac{2}{2} = \frac{3}{4}$.

§. 73. Wenn man Brüche von verſchiedenen Nennern unter einerley Benennung bringen, d. i. machen will, daß ſie alle einerley Nenner bekommen, ſo kommt es auf zwey Stücke an:

a) Wenn es nur zween Brüche ſind, ſo multiplicire man den Zähler und Nenner eines jeden Bruchs durch den Nenner des andern.

Die Brüche heiſſen: $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$,

5) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{2}{5}$; $= \frac{15}{20}$ und $\frac{8}{20}$

b) Wenn es mehr, als zween Brüche ſind, ſo müſſen Zähler und Nenner in das Product aller übrigen Nenner, ſeinen eigenen ausgenommen, multiplicirt werden.

Die Brüche heiſſen: $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{5}$

10) $\frac{2}{3}$; 15) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{4}{5}$; $= \frac{20}{30}$; $\frac{15}{30}$; $\frac{24}{30}$;

§. 74. Man kann Brüche aufheben oder kleiner ausdrücken, wenn ſich Zähler und Nenner mit einer dritten Zahl genau dividiren laſſen. Z. E. der Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{6}{18}$ läßt ſich durch 3 dividiren, dann $\frac{6}{18} : \frac{3}{3} = \frac{2}{6}$ Die Diviſores von großen Zahlen muß man durch Uebung finden lernen, oder, wenn man es nicht ſchnell genug kann, den Nenner durch den Zähler ſo lang dividiren, als er ſich dividiren läßt. Z. E. $\frac{88}{136}$ ſoll aufgehoben werden. Man dividire 136 durch 88, ſo iſt der Quotient 1, und bleibt noch ein Reſt von $\frac{48}{88}$. In dieſem neuen Bruch wird 88 durch 48 dividirt, der Quotient iſt 1, und der übrig bleibende Bruch iſt $\frac{40}{48}$. Dividirt man 48 durch 40, ſo bekommt man den Quotienten 2 und den Bruch $\frac{8}{40}$. Wird endlich 40 durch 8 dividirt, ſo iſt der Quotient 5. Man ſieht zugleich, daß der lezte Diviſor 8 genau, ohne einen Bruch, in dem Dividendo 40 enthalten iſt, und iſt ſicher, daß durch dieſe 8 auch der obige Bruch $\frac{88}{136}$ aufgehoben werden könne und $\frac{11}{17}$ ausmache.

(4
8(8
a) 136 | 1 $\frac{48}{88}$
88

(40
b) 88 | 1 $\frac{40}{88}$
48

c) 8(8 | 2 $\frac{8}{40}$
40

8
d) 40 | 5 Alſo: 136 | = 17 u. 88 | 11
8 88 | Nenner. 88 | Zähler.

Wenn

Wenn man zuletzt durch dieſe Operation auf einen Diviſor kommt, der 1 iſt, ſo iſt es ein Zeichen, daß ſich der Bruch gar nicht mehr aufheben läßt.

§. 75. Der Ausdruck: den Bruch kleiner machen, iſt der Sache ſelbſt nicht angemeſſen, dann der Bruch wird nicht kleiner, ſondern bleibt ſo groß, als er vorhin war, er wird nur anders und kürzer, ausgedruckt. Einen Bruch kleiner machen, heißt alſo nur ſoviel, als durch die Diviſion einen Bruch unter eine kürzere Benennung bringen. Folgende Regeln können auſſer der oben angegebenen allgemeinen Regel (§. 74.) auch noch mit zu Hülfe genommen werden:

I.) Wenn 1) ſich das letzte Zahlzeichen einer gegebenen Zahl durch 2 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze Zahl dadurch dividiren. Z. E. 3788 läßt ſich durch 2 dividiren, dann die lezte 8 kann dadurch aufgehoben werden.

3788 : 2 = 1894.

Wenn 2) das letzte Zahlzeichen ſich durch 5 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze Zahl durch 5 dividiren.

Z. E. 4975 kann durch 5 dividirt werden, dann 5 wird durch 5 aufgehoben. Z. E. 4975 : 5 = 995

Wenn 3) das letzte Zahlzeichen 0 iſt, ſo läßt ſich die ganze Zahl durch 10 dividiren.

Z. E. 567890 : 10 = 56789

II.) Wenn ſich die Summe aller Zahlzeichen durch 3 oder 9 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze Zahl dadurch dividiren.

Z. E.

Z. E. die Zahlen 6, 9, 3, geben zuſammen addirt 18; Nun läßt ſich 18 durch 3 und 9 aufheben, dann 18: 3=6 und 18: 9=2, mithin läßt ſich auch ſechshundert und drey und neunzig durch 3 und 9 aufheben, 693: 3=231 und
693: 9=77

III.) Wenn das letzte Zahlzeichen zu dem mit 2 multiplicirten vorletzten addirt wird, und die Summe durch 4 dividirt, gerade aufgeht, ſo läßt ſich die ganze Zahl durch 4 dividiren.

Die Zahl ſey 6788. Die vorletzte 8 durch 2 multiplicirt, gibt 16, die letzte 8 dazu addirt, gibt die Summe 24; da ſich nun 24 durch 4 dividiren läßt, (24: 4=6) ſo läßt ſich auch die ganze Zahl durch 4 dividiren, dann 6788: 4=1697

IV.) Wenn das letzte Zahlzeichen zur Summe aller vorhergehenden, mit 4 multiplicirten Zahlzeichen addirt, ſich durch 6 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze Zahl durch 6 dividiren.

Die ganze Zahl ſey 7986. Die Summe der 3 erſtern Zahlen 7, 9, 8, macht 24. Multiplicirt man dieſe 24 mit 4, ſo gibt es 96, wird die letzte Zahl 6 zu den 96 addirt, ſo iſt die Summe 102. Dieſe 102 laſſen ſich durch 6 dividiren, (dann 102: 6=17) alſo läßt ſich auch die ganze Zahl durch 6 dividiren, dann 7986: 6=1331

§. 76. In manchen Fällen kann man auch ſtatt der letzten Ziffer im Zähler, die keine gerade Zahl iſt, die ihr nächſtkommende gerade Ziffer ſetzen, da denn durch die Diviſion mit 2 ein Bruch von kleinerer Benennung herauskommt, welche dem von

größerer

größerer Benennung zwar nicht ganz, aber doch beinahe gleichkommt. Z. B. ſtatt $\frac{81}{110}$ ſetze ich $\frac{80}{110}$; dieſes Bruchs Zähler und Nenner durch 10 dividirt, gibt den Bruch $\frac{8}{11}$, welche nur um eine ganz geringe Kleinigkeit von dem Bruch $\frac{81}{110}$ unterſchieden iſt. Eben ſo könnte man ſtatt des Bruchs $\frac{341}{2345}$ den Bruch $\frac{340}{2345}$ ſetzen, und dieſen durch die Diviſion mit 5 zu der kleinern Benennung $\frac{68}{459}$ bringen.

§. 77. Brüche laſſen ſich auf zweyerley Weiſe addiren und ſubtrahiren.

I) Wenn man, in ſofern ſie einerley Nenner haben, nur die Zähler addirt, oder von einander ſubtrahirt, und hernach den gemeinſchaftlichen Nenner darunter ſetzt.

a) Addiren.

$\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{4}$

Dieſe beeden Brüche haben einerley Nenner; addirt man alſo, ſo ſagt man $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$. Wird der Nenner 4 der Diviſor des Zählers 5, ſo iſt der Quotient $1\frac{1}{4}$

b) Subtrahiren.

$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$

II) Wenn man, in ſo ferne ſie verſchiedene Nenner haben, die verſchiedene Nenner zuvor unter einerley Benennung bringt, und ſie ſodann addirt, oder ſubtrahirt.

a) Ad-

a) Addiren.

$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ zu einerley Benennung gebracht, geben $\frac{30}{40} + \frac{16}{40} + \frac{20}{40}$, und zuſammen addirt: $\frac{66}{40} = 1\frac{26}{40} = 1\frac{13}{20}$

b) Subtrahiren.

$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ zu einerley Benennung gebracht, geben: $\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$

§. 78. Soll man eine ganze Zahl zu einem Bruch addiren, ſo werden entweder beide blos neben einander geſetzt, ſo, daß der Bruch der ganzen Zahl angehängt wird, z. B. $4 + \frac{3}{8} = 4\frac{3}{8}$; oder man drückt die ganze Zahl als einen Bruch aus, indem man ihr den Nenner 1 gibt, bringt alsdenn beide unter einerlei Benennung, und addirt ſie, z. B. $\frac{4}{1} + \frac{3}{8} = \frac{32}{8} + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$. Noch kürzer kann man dieß finden, wenn man die ganze Zahl 4 in den Nenner des Bruchs $\frac{3}{8}$ multiplicirt, darauf den Zähler 3 zu dem Product addirt, und den Nenner wieder darunter ſchreibt.

§. 79. Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl ſubtrahirt werden, ſo muß man zuförderſt die ganze Zahl wie einen Bruch ausdrucken, deſſen Nenner gleich 1 iſt, alsdenn die Brüche unter einerley Benennung bringen, und den Bruch, welcher ſubtrahirt werden ſollte, von dem andern, der die ganze Zahl ausdrückt, würklich abziehen.

Z. B. $4 - \frac{3}{8} = \frac{4}{1} - \frac{3}{8} = \frac{32}{8} - \frac{3}{8} = \frac{29}{8}$.

Kür-

Kürzer kann man die Sache machen, wenn man gleichbald die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, darauf deſſen Zähler abzieht, und unter den Reſt den vorigen Nenner wieder unterſchreibt. Z. B. bei der Rechnung $4 - \frac{3}{8}$ ſage ich: 4 mal 8 iſt 32 — 3 = $\frac{29}{8}$.

§. 80. Soll eine ganze Zahl von einem Bruch abgezogen werden, ſo geſchieht es, wie §. 79. geſagt worden, nur daß alsdann dem Reſt das Minuszeichen vorgeſetzt wird. Z. B. Ich ſoll 4 von $\frac{3}{8}$ abziehen, d. i. $\frac{3}{8} - 4$, ſo geht diß eigentlich nicht an, weil 4 gröſſer iſt, als $\frac{3}{8}$, indeſſen kann ich doch $\frac{3}{8}$ von 4 abziehen, da $\frac{29}{8}$ bleiben; und wenn ich davor das Zeichen (—) ſetze, ſo iſt es eben ſo viel, als wenn 4 von $\frac{3}{8}$ wäre abgezogen worden. Der Reſt iſt nemlich — $\frac{29}{8}$. Das heißt, wenn noch würkliche $\frac{29}{8}$ da wären, ſo würden dieſe darauf gehen, und alsdann erſt Nichts übrig bleiben. Eben dieſes würde der Fall ſeyn, wenn jemand 4 Gulden bezahlen ſollte, und nur $\frac{3}{8}$ Gulden in ſeinem Vermögen hätte. Hätte er würklich 4 Gulden im Vermögen, ſo würden 4 Gulden Schulden von 4 Gulden Vermögen abgezogen, und alsdenn bliebe Nichts übrig. Nun aber, da er nur $\frac{3}{8}$ Gulden, oder 22 Kreutzer 4 Heller im Vermögen hat, und doch 4 Gulden bezahlen ſoll, ſo muß man erſt die $\frac{3}{8}$ Gulden von 4 Gulden abziehen, da denn $\frac{29}{8}$ oder $3\frac{5}{8}$ Gulden,

Gulden, d. i. 3 fl. 37 kr. 4 Heller übrig bleiben, dieß wäre aber keine Baarſchaft, ſondern Schulden, welche der Baarſchaft gerade entgegengeſetzt ſind. Wer alſo 4 Gulden ſchuldig iſt, und nur $\frac{3}{8}$ Gulden bezahlen kann, der behält, wenn man ihm die $\frac{3}{8}$ Gulden abgezogen hat, noch $3\frac{5}{8}$ Gulden Schulden, und wenn ihm jemand $3\frac{5}{8}$ Gulden ſchenkt, dieſe Schuld zu bezahlen, ſo hat er alsdann erſt Nichts. So lang er aber $3\frac{5}{8}$ Gulden Schulden und ſonſt gar keine Baarſchaft hat, ſo hat er weniger als Nichts.

§. 81. Wenn man die Differenz zu dem Bruch, welcher ſubtrahirt hat, wieder addirt, ſo kommt der Bruch heraus, von welchem ſubtrahirt worden iſt.

Z. B. $3\frac{2}{8} - \frac{3}{8} = \frac{29}{8}$ und $\frac{29}{8} + \frac{3}{8} = \frac{32}{8}$.

§. 82. **Einen Bruch mit einem andern multipliciren**, heißt: von dem erſten ein ſolches Stück nehmen, als der andere anzeigt. Man theile demnach den erſten in ſo viele Theile, als des andern Nenner Einheiten hat, und nehme von dieſen Theilen ſoviel, als des andern Zähler befiehlt. Jenes geſchieht durch die Multiplication der **Nenner**, dieſes durch die Multiplication der Zähler.

$$\frac{3}{4}\ \frac{5}{6} = \frac{3}{4}\,\frac{5}{6} = \frac{15}{24}.$$

$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{6}$ multipliciren, heißt demnach $\frac{5}{6}$ von $\frac{3}{4}$ nehmen, $\frac{3}{4}$ muß alſo in 6 gleiche Theile getheilt werden,

den, weil der Nenner des Multiplicators 6 iſt, und von dieſen 6 Theilen nimmt man fünf.

§. 83. Die Multiplication mit einem eigentlichen Bruche gibt ein kleineres Product, als der multiplicirte Factor war; und das Product aus zween eigentlichen Brüchen iſt kleiner, als jeder Factor. Z. E. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Die Hälfte einer halben Elle iſt eine Viertelelle und alſo kleiner, als die halbe Elle.

§. 84. Das Quadrat eines Bruches iſt ein Bruch, deſſen Zähler und Nenner das Quadrat des Zählers und Nenners der Wurzel ſind. Z. E.

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 7} = \frac{25}{49}$$

§. 85. Der Cubus eines Bruchs iſt ein Bruch, deſſen Zähler und Nenner der Cubus des Zählers und Nenners der Wurzel ſind. Z. E.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{64}{729}$$

§. 86. Wenn man einen Bruch durch eine ganze Zahl oder eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt, ſo wird nur der Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirt; dann man kann die ganze Zahl als einen Bruch anſehen, deſſen Nenner = 1. Z. E.

$$6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$$

§. 87. Brüche werden durch Brüche dividirt, wenn man den dividirenden Bruch umkehrt, und alsdenn Zähler mit Zählern und Nenner mit Nennern multiplicirt. Z. E. ſoll $\frac{6}{10}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden, ſo kehrt man den Diviſor $\frac{3}{4}$ um und ſagt:

$$\frac{6}{10} : \frac{3}{4} = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

§. 88. Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, ſo wird entweder der Nenner des Bruchs in die ganze Zahl multiplicirt, das Product zum Zähler, und der vorige Zähler des Bruchs zum Nenner gemacht, z. B. $4 : \frac{2}{3} = \frac{12}{2}$, und dieſes iſt der Quotient aus 4 durch $\frac{2}{3}$ dividirt.

Oder man kehre den Diviſor $\frac{2}{3}$ ſo gleich um, und multiplicire in dem Bruch $\frac{3}{2}$ den Zähler 3 mit 4, ſo bekommt man auch den Bruch $\frac{12}{2}$ wie vorher zum Quotienten. Z. B. $4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{2}$. Daß dieſe Diviſion ſeine Richtigkeit habe, erhellt aus Folgendem: wenn 4 durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden ſoll, ſo ſoll eine Zahl gefunden werden, die anzeigt, wie vielmal $\frac{2}{3}$ in 4 enthalten ſei. Nun iſt aber $\frac{2}{3}$ in 4 ſechsmal enthalten; oder die Zahl 6 iſt der Quotient, welcher anzeigt, wie oft $\frac{2}{3}$ in 4 enthalten ſei, denn $\frac{2}{3}$ 6mal genommen gibt $\frac{12}{3}$, und $\frac{12}{3}$ iſt ſo viel als 4. Es ſteckt alſo $\frac{2}{3}$ in 4 ſechsmal.

Dieſer

Dieſer Quotient 6 iſt oben auch gefunden worden, indem $\frac{12}{2}$ herauskam, denn $\frac{12}{2}$ iſt ſo viel als 6.

§. 89. Soll aber ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, ſo wird der Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirt. Denn wenn man die ganze Zahl durch Unterſchreibung des Nenners 1 als einen Bruch ausdrückte, ſo würde man, um den eigentlichen Bruch damit zu dividiren, den Bruch, der die ganze Zahl ausdrückt, umkehren, und alsdenn Zähler in Zähler und Nenner in Nenner multipliciren müſſen. Da aber, niemals die Zahl, die durch ſie multiplicirt werden ſoll, ändert, ſo iſt es eben ſo viel, als ob man blos mit dem Nenner in die ganze Zahl multiplicirt hätte.

Z. B. $\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3} : \frac{3}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Kürzer kommt man zurecht, wenn man gleich den Nenner 3 in die ganze Zahl 3 multiplicirt.

Z. B. $\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$.

§. 90. Wenn man mit Zahlen rechnen ſoll, wo Brüche an ganzen Zahlen hängen, ſo bringe man Alles unter einerlei Benennung, und rechne alsdenn. Z. B.

$$(3 + \frac{2}{5}) : 5 - \frac{1}{2}) = (\frac{15}{5} + \frac{2}{5}) : \frac{10}{2} - \frac{1}{2})$$
$$= \frac{17}{5} : \frac{9}{2} = \frac{17}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{34}{45}.$$

Vierter Abſchnitt.

Von den entgegengeſetzten Größen.

§. 91. Entgegengeſetzte Größen nennt man Größen, die in einem ſolchen Verhältniß gegen einander betrachtet werden, daß eine die andere vermindert; z. B. Vorwärts und Rückwärtsgehen, Vermögen und Schulden. Eine von dieſen Gröſſen, welche man will, heißt man poſitiv oder bejahend, negativ oder verneinend.

Schulden ſind ein verneinendes Vermögen, und Vermögen kann man als verneinende Schulden anſehen.

§. 92. Man kann die verneinende Größe als etwas anſehen, das von der bejahenden abgezogen werden muß, und alſo mit dem Zeichen — bezeichnen, wenn die bejahende + hat. So machen z. B. 7 Gulden Vermögen und 4 Gulden Schulden + 7 — 4 Gulden Vermögen, oder 7 Gulden Schulden und 3 Gulden Vermögen machen + 7 — 4 Gulden Schulden. Nennt man die Schulden poſitiv, ſo iſt das Vermögen negativ. Nennt man aber das Vermögen poſitiv, ſo ſind die Schulden negativ; daher es gleichgültig und willkührlich iſt, welche man von beyden poſitiv oder negativ nennt.

§. 93. Die verneinende Größe kann die bejahende übertreffen. In dieſem Fall ſollte mehr abgezogen werden, als vorhanden iſt, das heißt, die bejahende Größe verzehrt ſo viel, als ſie beträgt in der verneinenden, und bleibt noch etwas von der verneinenden mit ihrem Zeichen übrig. Z. B. 7 Gulden Vermögen und 10 Gulden Schulden machen 7 — 10 Vermögen, d. i. — 3 Vermögen.

Dieſes Negative, das übrig bleibt, iſt eine würkliche Größe, und nur derjenigen entgegengeſetzt, die als poſitiv betrachtet wird. Drei Gulden Schulden ſind etwas Würkliches und können, als Schulden betrachtet, poſitiv genannt werden; nur als Vermögen angeſehen, ſind ſie negativ, d. i. dem Vermögen entgegengeſetzt.

§. 94. Eine negative Größe heißt alſo weiter nichts, als eine Größe, die man als die ihr entgegengeſetzte betrachtet, und dieſes durch die Verneinung anzeigt. Will man Schulden als Vermögen betrachten, ſo muß man ſie als etwas dem Vermögen entgegengeſetztes, als verneinendes Vermögen betrachten.

§. 95. Setzt man zu einer verneinenden Größe die ihr gleiche bejahende, ſo heben beide einander auf, und geben zuſammen Nichts, $-3+3=0$, d. i. wer 3 Gulden ſchuldig iſt, und 3 Gulden baar

bekommt, der zahlt damit die Schulden, und hat alsdenn Nichts. Er hat zuvor weniger als Nichts gehabt, weil er nun erſtlich Nichts hat, nachdem er etwas bekommen hat. In dieſem Verſtande kann man eine verneinende Größe weniger als Nichts nennen, ſie iſt nemlich weniger als Nichts in Abſicht auf die entgegengeſetzte. Kommt eine ihr gleiche entgegengeſetzte zu ihr, ſo iſt alsdenn nichts von der entgegengeſetzten vorhanden, und es fehlt ihr alſo noch etwas, um Nichts von der entgegengeſetzten zu werden. An ſich ſelbſt aber iſt jede verneinende Größe mehr als Nichts, weil ſie eine würkliche Größe iſt. Der Ausdruck weniger als Nichts ſetzt eine Bedeutung des Worts Nichts voraus, die ſich auf eine gewiſſe Art, das Etwas zu betrachten, bezieht, welche ſich von dem Nichts ohne Beziehung unterſcheiden lieſſe. Jenes heißt nihilum relativum, dieſes nihilum abſolutum.

Rechnung mit entgegengeſetzten Größen.

a) Addition.

§. 96. Hier nimmt man die kleinere Zahl von der größeren weg, und hängt dem Reſt das Zeichen der größern Größe vorne an, denn die eine hebt gleichviel in der andern auf (§. 93.), und alſo bleibt etwas von der größern übrig.

Z. B. $+7$
-5
$= +2$

Aber

$+5$
-7
$= -2$

Kommen verſchiedene verneinende und bejahende Größen vor, ſo rechne man jede Claſſe zuſammen, und bemerke die Summen aus beiden.

Z. B. $+9 - 5$
$+7 - 4$
$+8 - 3$
$= +24 - 12 = +12$

Wenn einerlei Zeichen vorhanden ſind, ſo addirt man ſchlechthin, und behält das Zeichen bei.

Z B. $+3$ oder -3
$+5$ -2
$= +8$ $= -5$

b) Subtraction.

§. 97. Eine Größe abziehen, heißt die ihr entgegengeſetzte addiren, denn die entgegengeſetzte iſt ſo viel, als die Größe ſelbſt, abgezogen. Von bejahenden Größen iſt dieſes klar, denn 4 von 7 abgezogen, iſt ſo viel, als $7 - 4$, d. i. die

4, welche poſitiv war, verneinend genommen und ſo zu der 7 addirt. Ob eben dieſes bei verneinenden Grőßen ſtatt finde, ob z. B. — 4 von + 7 abziehen ſo viel ſei, als + 4 zu 7 addiren, kann man daraus ſehen, weil die verneinende als bejahend angeſehen werden kann, wenn man die ihr entgegengeſetzte verneinend nennt. Wie alſo die bejahende Grőße beim Abzug ihr Zeichen in das entgegengeſetzte verneinende verwandelt, ſo muß die verneinende Grőße beim Abzug ihr Zeichen in das entgegengeſetzte bejahende verwandeln. Soll man z. B. — 4 von + 7 abziehen, ſo ſtelle man ſich die Grőße, von welcher abgezogen werden ſoll, nemlich 7, zwar als ungeändert vor, die aber doch die Grőße, welche abgezogen werden ſoll, nemlich 4, als einen Theil in ſich enthält. Dieſes geſchiehet, wenn man die Grőße 7 mit ihrem Zeichen + und auch mit dem entgegengeſetzten Zeichen — zu 4 ſetzt, als der Grőße, welche abgezogen werden ſoll. Dieſer Abzug wird alſo geſchehen, wenn man von der ſolchergeſtalt ausgedruckten Grőße den Theil, den man abziehen ſoll, wegnimmt, und ſo bleibt eben dieſes, das man abziehen ſollte, mit dem entgegengeſetzten Zeichen ſtehen. Wann man alſo + 7, als die Grőße, von welcher abgezogen werden ſoll, ſo ausdrückt, daß — 4, oder die Grőße, welche abgezogen werden ſoll, ein Theil von jener iſt, ſo ſetzt man $+7 = 7 - 4 + 4$. Nimmt man nun von dieſer eben ausgedruckten Grőße

(7—4

(7 — 4 + 4) die Größe — 4 weg, ſo bleibt + 7 + 4, alſo iſt + 7 — (— 4) = + 7 + 4.

§. 98. Wenn eine Größe, von welcher eine andere Größe abgezogen werden ſoll, von einer dritten ſubtrahirt wird, ſo wird die erſte ſubtrahirt und die andere addirt, weil eben dieſe zweite zuviel abgezogen worden, wenn man die erſte ganz ſubtrahirt hat. Z. B. ſoll ich von 7 abziehen 5 — 4, ſo kommt heraus 7 — 5 + 4 = 6, denn wenn man 5 ganz ſubtrahirt, ſo kommt 2 heraus, ich ſoll aber nur 5 — 4 abziehen, folglich muß ich 4 wieder addiren. Die zu ſubtrahirende Größe muß in Klammern eingeſchloſſen werden.

Z. B. 7 — (5 — 4) = 7 — 5 + 4 = 6;
10 — (3 — 1) = 10 — 3 + 1 = 8.

§. 99. Wenn man Größen mit einerlei oder verſchiedenen Zeichen von einander abziehen ſoll, ſo verwandle man in der Größe, die man abziehen ſoll, das Zeichen jeden Theils in das entgegengeſetzte, und addire nach dieſer Verwandlung. (§. 97.)

§. 100. Wenn man mit entgegengeſetzten Zahlen rechnet, ſo darf man die Einheit als bejahend annehmen, denn wie alsdann die bejahenden Zahlen Mengen dieſer Einheit oder ihrer Theile ſind, ſo ſind die verneinenden Zahlen Mengen des Entgegengeſetzten dieſer Einheit.

c) Multiplication.

§. 101. Eine bejahende Größe mit einer verneinenden multiplicirt gibt ein verneinendes Product.

Z. B. + 7. − 3 = − 21.

In dieſem Product − 21 ſteckt − 3 ſo vielmal, als + 1 in + 7 ſteckt; oder mit andern Worten: das Product ſoll die verneinende Größe ſo vielmal enthalten, als die bejahende die Einheit enthält. Da nun der bejahende Factor die bejahende Einheit (§. 100.) ſelbſt etlichemal, oder einige Theile von ihr genommen iſt, ſo iſt auch das Product ſo viel als der verneinende Factor ſelbſt etlichemal, oder einige Theile von ihm genommen, d. i. es iſt verneinend.

§. 102. Eine verneinende Größe mit einer bejahenden multiplicirt, gibt ein verneinendes Product.

Z. B. − 7. + 3 = − 21.

d. i. man ſoll hier − 7 dreimal nehmen, alſo gibt es − 21, denn in + 21 wäre das Entgegengeſetzte von − 7 dreimal enthalten. Die verneinende Größe ſteckt in dem Product ſo vielmal, ſo vielmal die bejahende Einheit (§. 100.) in dem bejahenden Factor ſteckt. Nun ſteckt die bejahende Einheit ſelbſt, und nicht ihr Entgegengeſetztes in dem bejahenden Factor, alſo muß auch der verneinende

neinende Factor ſelbſt in dem Product ſtecken, d. i. das Product muß verneinend ſeyn.

§. 103. Zwo verneinende Größen mit einander multiplicirt, geben ein bejahendes Product.

Z. B. − 7. − 3 = + 21

Dieſes Product (+ 21) enthält den einen verneinenden Factor ſo vielmal, als der andere Factor die Einheit enthält. Aber die Einheit ſteckt in dieſem Factor nicht ſelbſt, ſondern ihr Gegentheil; alſo ſteckt auch der übrige verneinende Factor nicht ſelbſt, ſondern ſein Gegentheil in dem Product, d. i. das Product iſt bejahend.

§. 104. Zween poſitive Factoren geben ein poſitives Product.

+ 6. + 3 = + 18.

Weil der eine Factor die Einheit ſelbſt etlichemal enthält; ſo muß der andere Factor auch ſelbſt etlichemal im Product enthalten ſeyn.

§. 105. Einerlei Zeichen beider Factoren geben in der Multiplication +, und verſchiedene Zeichen geben − (§. 101—104).

§. 106. Wenn man Größen multipliciren ſoll, die aus entgegengeſetzten zuſammengeſetzt ſind, ſo multiplicire man wie gewöhnlich jeden Theil des einen Factors durch jeden Theil des andern

dern Factors, und ſetze die Zeichen wie bei §. 105. geſagt worden.

$$\text{Z. B. } \frac{+6-3+7=10}{+5+2-3=4}$$

$$\left.\begin{array}{l} +6.5-3.5+5.7 \\ +6.2-3.2+2.7 \\ -6.3+3.3-7.3 \end{array}\right\} = 40.$$

d) Diviſion.

§. 107. **Wenn der Diviſor und Dividendus entgegengeſetzte Zeichen haben, ſo iſt der Quotient negativ.**

$$\text{Z. B. } \frac{+20}{-5} = -4$$

Hier ſteckt der Diviſor (— 5) nicht ſelbſt, ſondern ſein Entgegengeſetztes (+ 5) in dem Dividendo (+ 20), alſo ſteckt auch nicht die Einheit ſelbſt (+ 1), ſondern ihr Entgegengeſetztes (— 1) im Quotienten.

§. 108. **Wenn Diviſor und Dividendus einerlei Zeichen haben, ſo iſt der Quotient poſitiv.**

$$\text{Z. B. } \frac{-12}{-3} = +4.$$

Hier ſteckt der Diviſor ſelbſt, und nicht ſein Entgegengeſetztes viermal im Dividendus, alſo ſteckt auch die Einheit ſelbſt im Quotienten.

§. 109.

§. 109. Einerlei Zeichen geben bei der Diviſion +, und verſchiedene geben —.

§. 110. Sollen Größen mit verſchiedenen Zeichen dividirt werden, ſo geſchiehet zwar die Diviſion wie gewöhnlich, die Zeichen aber werden nach §. 108. beſtimmt.

Z. B. $\frac{100 - 25}{5} = 20 - 5 = 15.$

Fünfter Abſchnitt.

Von der Buchſtabenrechnung.

§. 111. Die Buchſtabenrechnung iſt eine Wiſſenſchaft, welche die Größen durch allgemeine Zeichen ausdrückt und lehrt, wie man mit dieſen allgemeinen Zeichen rechnen, d. i. aus gegebenen Größen andere unbekannte ſuchen ſoll. Man heißt ſie Buchſtabenrechnung, weil die allgemeinen Zeichen der Größen die würklichen Buchſtaben des lateiniſchen, beſonders kleinern, auch zuweilen, wenn man viel ſchickliche Zeichen braucht, des griechiſchen und teutſchen Alphabets ſind. Man nennt ſie auch Algebra im eigentlichen Verſtand, zum Unterſchied von der Algebra im engern Verſtand oder der Analyſis.

§. 112. Eine Zahl überhaupt anzudeuten, bediene man ſich eines Buchſtabens. Die Veränderungen, die mit den Zahlen vorgenommen werden, drücke

drücke man durch die bisher ſchon (§. 96—110.) gebrauchten Zeichen aus, nur zeige man die Multiplication auch dadurch an, daß man die beiden Factoren, ohne einen Punct dazwiſchen zu ſetzen, neben einander ſchreibt, weil die Buchſtaben nicht wie die Ziffern einen Werth von ihrer Stelle bekommen. Z. B. das Product aus zwo Zahlen überhaupt heißt $a.b$ oder ab. Es ſei $a = 3$
$b = 4$,
ſo heißt es: $3.4 = 12$.

Wenn $a = 7$
$b = 9$,
ſo heißt $7.9 = 63$; und ſo ſtellt dieſer Ausdruck ab alle möglichen Producte; der Ausdruck $c + d$ alle möglichen Summen; der Ausdruck $e - f$ alle Differenzen, und der Ausdruck $g : h$ oder $\frac{g}{h}$ alle Quotienten vor.

§. 113. Die Buchſtaben können zwar ſowohl ganze Zahlen als Brüche bedeuten, aber zu der gegenwärtigen Abſicht wird es meiſtens genug ſeyn, ſie als Zeichen ganzer Zahlen zu betrachten. Indeſſen bleiben die Regeln ihrer Rechnung allgemein, wenn dieſe Regeln nichts vorausſetzen, das die Bedeutung der Buchſtaben auf ganze Zahlen einſchränkte. Dergleichen Einſchränkung iſt, wenn man eine gerade Zahl mit $2m$, jede ungerade mit $2n + 1$ bezeichnet, wo m und n ganze Zahlen bedeuten müſſen.

§. 114.

§. 114. Weil jeder Buchſtab jede Zahl bedeuten kann, ſo laſſen ſich zween Buchſtaben überhaupt ohne weitere Beſtimmungen nicht mit einander vergleichen. Wenn aber einerlei Buchſtabe einmal mit dieſer beſtimmten Zahl, das anderemal mit einer andern multiplicirt iſt, ſo läßt ſich eine Vergleichung zwiſchen dieſen beiden Producten anſtellen. Z. B. 200 c iſt viermal ſo viel als 50 c; und 7 d + 12 d = 19 d; c und d mögen ſeyn, was ſie wollen.

§. 115. Hat eine Größe gar kein Zeichen vor ſich, weder + noch —, ſo denkt man ſie ſich allezeit in der Verbindung mit +.

Z. B. a + b — c = + a + b — c.

§. 116. Einfache Größen ſind ſolche, welche, auſſer + oder —, weiter kein Zeichen bei ſich haben. Z. B. ab und — cd. Zuſammengeſetzte Größen ſind ſolche, welche mehrere Ausdrücke in der Verbindung mit +, oder in der Abſönderung mit — haben. Z. B. a + b; c — c.

§. 117. Die einfache Größe nennt man monomiſch, z. B. a. Jede andere zuſammengeſetzte Größe heißt polynomiſch. Hat die polynomiſche nur zween Ausdrücke, ſo heißt ſie binomiſch, z. B. a — b; hat ſie drei Ausdrücke, ſo heißt ſie

ſie

ſie trinomiſch, z. B. a + b — c; hat ſie vier Ausdrücke, ſo heißt ſie quadrinomiſch.

Z. B. ab — c — d + ff

§. 118. Jede algebraiſche Größe, die kein Wurzelzeichen bei ſich hat, heißt rationale Gröſſe, z. B. a — b; die aber ein ſolches Zeichen bei ſich hat, irrationale Größe, z. B. $\sqrt{c-d}$.

§. 119. Ziffern, die vor einem algebraiſchen Ausdruck vorhergehen, heiſſen Coefficienten, z. B. 3 ab + 4 cd; hier ſind 3 und 4 Coefficienten.

§. 120. Jede algebraiſche Größe, vor welcher keine Ziffer vorhergeht, hat 1 zum Coefficienten, z. B. ab = 1 ab.

§. 121. Eine Ziffer, die oben hinter einem Buchſtaben ſteht, heißt Exponent. Z. B. 2 iſt der Exponent von a = a^2; 3 der Exponent von a = a^3.

§. 122. Größen, bei welchen kein Exponent ausdrücklich ſteht, haben 1 zum Exponenten.

Z. B. a = a^1; bc = bc^1.

§. 123. Man verwechsle die Exponenten und Coefficienten nicht unter einander. Die erſten ſind Zeichen der Multiplication, die letzten der Addition.

Iſt

Iſt z. B. $a = 10$, ſo iſt $a^2 = 100$, und $2a = 20$. dann $a^2 = a.\ a$;

$$a^2 = 10.\ 10.$$
$$10.\ 10 = 100.$$

Aber $2a = a + a$, d. i. $2a = 10 + 10 = 20$.

a) Addition.

§. 124. **Addition mit einerlei Zeichen und einerlei Buchſtaben.**

Z. B.
$$2a - 2b - 2c$$
$$4a - 4b - 4c$$
$$\overline{= 2a + 4a - 2b - 4b - 2c - 4c}$$
$$= 6a - 6b - 6c.$$

§. 125. **Addition mit einerlei Zeichen, aber verſchiedenen Buchſtaben.**

Z. B.
$$3a - 4b$$
$$-2a + 2b$$
$$\overline{= 3a - 2a - 4b + 2b}$$
$$= a - 2b$$

§. 126. **Addition verſchiedener Größen, welche verſchiedene Buchſtaben haben.**

Z. B.
$$ab - cd$$
$$mn + os$$
$$\overline{= ab - cd + mn + os.}$$

§. 127. Addition ſolcher Größen, welche aus mehreren ähnlichen Ausdrücken zuſammengeſetzt ſind.

Z. B.
$$\begin{array}{l} 3a^2b^3 - 5cs^4 - 4dr + 2s \\ - a^2b^3 + 4cs^4 + 4dr - s \\ \hline = 3a^2b^3 - a^2b^3 - 5cs^4 + 4cs^4 \\ \quad - 4dr + 4dr + 2s - s \\ = 2a^2b^3 - cs^4 + s \end{array}$$

§. 128. Aehnlich ſind die Größen in der Algebra, die einerlei Buchſtaben, und die nemliche Anzahl von Buchſtaben haben, z. B. 5abd und 2abd ſind ähnliche Größen, deren eine fünfmal, die andere zweimal genommen worden iſt.

§. 129. Man hat nicht nöthig, auf die Coefficienten beſonders Acht zu geben, wenn es uns um ähnliche algebraiſche Größen zu thun iſt, man ſchreibe nur die Buchſtaben genau nach der Ordnung des Alphabets, denn obgleich 2abd die nemliche Größe iſt, wie 2dba, und 5abd wie 5dba, ſo fällt doch 5abd und 2abd eher ins Geſicht, als 5bad 2bda. Die Größen $4a^3$ und $2a^3f$ ſind keine ähnliche Größen, weil ſie nicht völlig einerlei Buchſtaben, und nicht die nemliche Anzahl von Buchſtaben haben.

§. 130. Folgende Regeln ſind durch obige Beiſpiele beſtättigt:

1) Sind

1) Sind nicht einerlei Buchſtaben gegeben, ſo ſchreibt man ſie blos mit ihren Zeichen hintereinander, die Größen mögen poſitive oder negative ſeyn, wie §. 127.

2) Sind Buchſtaben und Zeichen einerlei, ſo zählt man die gleichen Buchſtaben zuſammen, und ſetzt vor jede Zahl, wie viel ihrer ſind, wie bei §. 124.

3) Sind einerlei Buchſtaben mit verſchiedenen Zeichen da, ſo zieht man die kleinere Zahl von der größern ab, und ſetzt bei dem Reſt das Zeichen der größern, wie bei §. 125.

b) Subtraction.

§. 131. Die Regeln, worauf die ganze algebraiſche Subtraction beruht, ſind folgende:

1) Sind in den Aufgaben nicht einerlei Buchſtaben vorhanden, ſo ſchreibe man diejenigen, welche abgezogen werden ſollen, gerade hinter diejenigen, von welchen ſie abzuziehen ſind, mit dem Zeichen —

Z. B. $2a^4 - 3b^2$

$xx - 2cx + cc$

$= 2a^4 - 3b^2 - xx + 2cx - cc.$

2) Sind einerlei Buchſtaben und Zeichen vorhanden, und es ſoll das Kleinere von dem

Größern abgezogen werden, ſo verfahre man wie bei der Rechnung mit Zahlen.

Z. B. $4ab + 4cd$
$2ab + 2cd$

$2ab + 2cd.$

3) Soll das Größere von dem Kleinern abgezogen werden, ſo ziehe man das Kleinere von dem Größern ab, und ſetze ſtatt + das Zeichen —, und ſtatt — das Zeichen + zum Reſte an. Geſetzt, man ſollte

$$-2cx + 3acx^2 + 4a^3m - 4a^3b$$

abziehen von

$$7acx^2 - 5a^3b + 5a^3m - acx + bd,$$

ſo würde, wenn die Anordnung gehörig geſchehen wäre, das Exempel folgendermaßen ſtehen:

$$\begin{array}{l} 7acx^2 - 4a^3b + 5a^3m - acx + bd \\ -3acx^2 + 5a^3b - 4a^3m + 2acx \\ \hline 4acx^2 + a^3b + a^3m + acx + bd. \end{array}$$

4) Sind die Zeichen verſchieden, aber einerlei Buchſtaben, ſo addire man die ähnlichen Buchſtaben, und ſetze zur Summe das Zeichen desjenigen, von welchem die Subtraction geſchehen iſt.

Z. B.

Z. B.

$$\begin{array}{rr} 4mn & + 6rs \\ - 2mn & - 2rs \\ \hline 6mn & + 8rs. \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rrrr} + 8c & - 5a & + c & - x \\ - c & + 3a & - 3c & + 5x \\ \hline + 9c & - 8a & + 4c & - 6x. \end{array}$$

§. 132. Wenn die gefundene Größe mit der abgezogenen zuſammengenommen der andern gegebenen gleich iſt, ſo hat man die Probe der Subtraction.

Z. B.

$$\begin{array}{rl} + 3a & \\ - 5a & \text{gibt} \\ \hline - 8a & \\ + 3a & \\ \hline \text{läßt} - 5a & \end{array}$$

§. 133. Eine allgemeine und leichte Regel für alle mögliche Fälle der Subtraction mit Buchſtaben iſt dieſe:

Man verändere alle Zeichen der abzuziehenden Größe in die entgegengeſetzten Zeichen und addire nach geſchehener Veränderung. Z. B.

$$\begin{array}{rrrrrr} 3a & - b & - 2c & + 5d & + 3x & - 7y \\ - 2a & - 3b & + 5c & + 2d & + 6x & - y \\ + & + & - & - & - & + \\ \hline 5a & + 2b & - 7c & + 3d & - 3x & - 6y \end{array}$$

denn

$$-2a-3b-5c+2d+6x-y$$

addirt, geben

$$3a-b-2c+5d+3x-7y.$$

§. 134. Wenn alſo endlich Größen von verſchiedener Art von einander ſollen ſubtrahirt werden, ſo folgt nun, daß nur die abzuziehenden Größen mit dem entgegengeſetzten Zeichen hinzugeſetzt werden dürfen. Z. B.

$$\begin{array}{llll} & 3a & 7x-y & \\ - & 2b & 2x & +r. \\ + & & - & - \\ \hline 3a & +2b & 5x-y & -r. \end{array}$$

c) Multiplication.

§. 135. Bei der Multiplication hat man auf vier Gegenſtände ſein Augenmerk zu richten, nemlich auf die Zeichen, die Coefficienten, die Buchſtaben und die Exponenten.

§. 136. Werden Größen von einerlei Zeichen und Buchſtaben multiplicirt, ſo erhält das Product das Zeichen +. Z. B.

$$\begin{array}{ll} 1) & +4abc \\ & +3abc \\ \hline & =12aabbcc=12a^2b^2c^2. \end{array}$$

2)

2) $-\ 6mnr$
$-\ 3mnr$

$= 18\,mmnnrr$
$= 18\,m^2n^2r^2.$

§. 137. Werden Größen mit verſchiedenen Zeichen und Buchſtaben multiplicirt, ſo liefert das Product das Zeichen —.

Z. B. $+\ abf$
$-\ cmr$

$= -\ abcfmr$

§. 138. Die Coefficienten multipliciren ſich, wie in der Arithmetik. S. §. 136. Nro. 1. 2.

§. 139. Die Buchſtaben multiplicirt man, wenn man ſie unmittelbar an einander hängt, allemal nach alphabetiſcher Ordnung. Z. B.

1) $ab = a.b;$
2) $3a.\ x.\ y = 3axy;$
3) $3a.\ y.\ b = 3aby;$
4) $4a.\ 3.\ y = 12ay.$

§. 140. Beſteht der Multiplicandus und Multiplicator aus mehreren Ausdrücken, ſo multiplicirt jeder Ausdruck des Multiplicators alle und jede Ausdrücke des Multiplicandus. Z. B.

1) $+\ a + b$
$+\ a - b$

$+\ aa + ab$
$-\ ab - bb$

$+\ aa - bb = a^2 - b^2$

Man kann auch das Product in gerader Linie nach einander ſchreiben, z. B.

$$+ aa + ab - ab - bb;$$

hebt man nun die beiden ab gegen einander auf, ſo bleibt $+ aa - bb$,

oder $a^2 - b^2$.

$$\begin{array}{lllll} 2) & a + b - c & & & \\ & a - b - c & & & \\ \hline & a^2 + ab - ac & & & \\ & \quad - ab - b^2 + bc & & & \\ & \qquad - ac - bc + c^2 & & & \\ \hline & a^2 \qquad - 2ac - b^2 + c^2. & & & \end{array}$$

oder in gerader Linie hingeſchrieben

$$aa + ab - ac - ab - b^2 + bc$$
$$- ac - bc + c^2$$

bringt man dieſe Buchſtaben in alphabetiſche Ordnung, ſo ſteht

$$aa + ab - ab - ac - ac$$
$$+ bc - bc - b^2 + c^2$$

Heben ſich nun $+ ab$ und $- ab$, $+ bc$ und $- bc$ gegen einander auf, ſo bleiben

$$a^2 - 2ac - b^2 + c^2.$$

§. 141. Die Exponenten multipliciren ſich nicht, ſondern addiren, und werden zuſammengezählt. Z. B.

— a

$$\begin{array}{rccc} - & a^2 & b^3 & c^4 \\ + & a^2 & b^2 & c^3 \\ \hline - & a^4 & b^5 & c^7. \end{array}$$

§. 142. Alle bisher angezeigten oder ſonſt möglichen Fälle der Multiplication der Zeichen ſind in nachſtehender Tabelle enthalten:

+. + gibt +
—. — gibt +
+. — gibt —
—. + gibt —

§. 143. Ueberhaupt gibt es bei der Multiplication nur zween Fälle; denn entweder beſteht der Multiplicator nur aus Einem Buchſtaben oder Zahlzeichen, oder aus mehreren, die durch das Zeichen + oder — verbunden ſind. Der erſte Fall iſt leicht. Z. B.

$$1)\quad \begin{array}{rr} a & -\ x \\ & x \\ \hline ax & -\ xx \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{rrr} a & -\ b & +\ 3d \\ & - & -\ b \\ \hline -\ ab & +\ bb & -\ 3bd. \end{array}$$

Der andere Fall, wenn nemlich beide Factores aus mehr Buchſtaben beſtehen, ſie mögen einerlei oder verſchieden ſeyn, iſt ſchwerer, doch ſind

oben ſchon Beiſpiele gegeben worden, z. B. §. 140. Nro. 1. und 2. Hieher kann man noch ſetzen

$$
\begin{array}{rl}
3) & a + b \\
 & a + b \\
\hline
 & aa + ab \\
 & \quad + ab + bb \\
\hline
 & aa + 2ab + bb; \\
 & = a^2 + 2ab + b^2
\end{array}
$$

oder in gerader Linie hingeſchrieben, ohne Partialproducte gemacht zu haben,

$$
\begin{array}{l}
aa + ab + ab + bb \\
\quad = a^2 + 2ab + b^2.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
4) & a - b \\
 & a - b \\
\hline
 & aa - ab \\
 & \quad - ab + bb \\
\hline
 & = a^2 + 2ab + b^2.
\end{array}
$$

oder

$$aa - ab - ab + bb.$$

Das Beiſpiel Nro. 3. wird unten bei der Multiplication der Potenzen gebraucht werden. Das Nro. 4. zeigt, wie bequem dieſe Rechnung iſt, allgemeine Lehrſätze zu finden, und kurz auszudrücken. Es heißt nemlich: die Summe zwoer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, gibt die Differenz ihrer Quadrate. Z. B.

$$17 \cdot 3 = 51 = 10^2 - 7^2.$$

§. 144. Die Factoren (a+b). (a+b), oder (a+b). (a—b) geben immer ein Quadrat, und man kann für $a^2 + 2ab + b^2$ den erſten Werth, und für $a^2 - 2ab + b^2$ den zweiten Werth, und umgekehrt ſetzen.

§. 145. Wenn in der Rechnung $a^2 - b^2$ vorkommt, ſo kann man jedesmal (a—b). (a+b) dafür ſetzen, und auch umgekehrt.

§. 146. Für den Ausdruck ax — xx läßt ſich (a— x) x und umgekehrt, wie auch für x—xx der Ausdruck (1—x) x ſetzen, denn wenn man würklich multiplicirt, ſo kommt x—xx heraus.

d) Diviſion.

§. 147. In der Diviſion werden die Buchſtaben, welche durch die Multiplication verbunden ſind, wieder getrennt, im Fall der Diviſor einerlei mit dem einen oder dem andern Factor des Dividendus iſt.

1) $\frac{ab}{a} = b$;

2) $\frac{abc}{bc} = a$;

3) $\frac{ag}{a} = g$;

Sind

Sind aber Dividendus und Diviſor ganz verſchieden, ſo wird die Diviſion entweder blos angezeigt,

z. B. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{a}$,

oder es wird der Quotient in einer unendlichen Reihe von Brüchen durch Näherung geſucht, wenn der Diviſor zuſammengeſetzt iſt, z. B.

$$\frac{a}{b+c} \text{ oder } \frac{a}{b-c}.$$

§. 148. Die Regeln dieſer Art von Diviſion ſind kürzlich dieſe: 1) die Zahl und die Buchſtaben, welche anzeigen, wie vielmal die Buchſtaben des Diviſors im Dividendus enthalten ſind, ſetze man in die Stelle des Quotienten, 2) man multiplicire und ſubtrahire eben ſo, wie bei der Diviſion mit den Zahlen, 3) man merke, daß einerlei Zeichen des Diviſors und Dividendus +, verſchiedene aber — geben.

§. 149. Ueberhaupt kommen zween Fälle bei der Diviſion vor: denn entweder iſt die zu dividirende Größe würklich ein Product aus dem Diviſor, als dem einen Factor, und einem andern Factor, welcher jetzt durch die Diviſion zum Quotienten gefunden werden ſoll, oder nicht. Im letzten Fall kann eigentlich nicht dividirt werden, ſondern es wird der Quotient nur dadurch angedeutet, daß die zu dividirende Größe und der Diviſor mit dem Diviſionszeichen hin-

hingeſetzt werden. Z. B. a dividirt durch b, gibt $\frac{a}{b}$ oder a: b; c dividirt durch a — 1 gibt den Quotienten $\frac{c}{a - 1}$ oder c: (a — 1).

§. 150. Diviſion mit einem Diviſor, der eine einzelne Größe iſt. Das Einzelne kann auch ein Product, z. B. ab ſeyn. Wenn man den Dividendus (ab — ac + ad) durch a dividirt, ſo verfahre man wie bei der Zahlen-Diviſion unter ſich. Man ſage: a in ab iſt b mal enthalten. Mit dem hieraus entſtehenden Quotienten b wird der Diviſor a multiplicirt, und das Product ab von dem obern ab ſubtrahirt. Nun ſetzt man den Reſt — ac + ad herunter, unterſchreibt wieder den Diviſor a, und ſagt: + a in — ac iſt — c mal enthalten; dieſer Quotient wird mit dem Diviſor multiplicirt, das Product — ac von dem oben ſtehenden — ac abgezogen, + ad nun heruntergeſetzt, wieder mit a dividirt, u. ſ. w.

Das Exempel ſieht alſo folgendermaßen aus:

```
ab — ac + ad | b — c + d
(a)          |
ab
------------
     — ac
      (a)
     — ac
--------------------
          + ad
           (a)
            ad
      ------------------
             0
```

§. 151.

§. 151. **Diviſion mit einem Diviſor, der keine einzelne Größe iſt.** Z. B.

1)
$$\begin{array}{lll|l} aa & - & bb & a - b \\ (a & + & b) & \\ aa & + & ab & \\ - & - & & \\ \hline & & - ab - bb & \\ & & (a + b) & \\ & & - ab - bb & \\ & & + \quad + & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l|l} aa - bb - 2ac + cc & a + b - c \\ (a - b - c) & \\ aa - ab - ac & \\ - \; + \quad + & \\ \hline \quad ab - bb - ac + cc & \\ \quad (a - b - c) & \\ \quad ab - bb - bc & \\ \quad - \; + \quad + & \\ \hline \quad - ac + bc + cc & \\ \quad (a - b - c) & \\ \quad ac + bc + cc & \\ \quad - \quad - \quad - & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

§. 157. Aus dem Bisherigen erhellt, wie man eine einzelne Größe durch einen zuſammengeſetzten Diviſor dividiren und den Quotienten durch Nähe-

rung

rung bekommen ſoll (§. 147.). Z. B. man ſoll 1 durch — x dividiren.

$1 \mid 1 + x + xx$ u. ſ. w.
$(1 - x)$
$1 - x$
$- \quad +$
―――――――――
x
$(1 - x)$
$x - xx$
$- \quad +$
―――――――――
xx
$(1 - x$
$xx - xxx$
$- \quad +$
―――――――――
xxx u. ſ. w.

Hier iſt ſo verfahren worden: 1 in 1 iſt enthalten 1mal, der Quotient 1 in den Diviſor 1 — x multiplicirt, gibt das Product 1 — x, welches vom Dividendus abgezogen + x läßt, wenn man die Zeichen verändert und addirt. Der Diviſor unter den Reſt + x wieder unterſchrieben giebt den Quotienten x, denn 1 in x iſt xmal enthalten, u. ſ. w.

Anwendung der Buchſtabenrechnung auf Brüche.

§. 153. Man bringt die Brüche in der Buchſtabenrechnung unter einerlei Benennung, addirt, ſub-

ſubtrahirt, multiplicirt, dividirt ſie nach eben den Regeln, wie bei den Brüchen in der Zahlenrechnun gelehrt worden.

§. 154. Brüche unter einerlei Benennung zu bringen.

Z. B. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{g}$;

$$\frac{a}{b} . dg = \frac{adg}{bdg}$$

$$\frac{c}{d} . bg = \frac{cbg}{bdg}$$

$$\frac{e}{g} . bd = \frac{ebd}{bdg}$$

§. 155. Brüche zu addiren.

1) Mit einerlei Nennern.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ac}{b};$$

2) Mit verſchiedenen Nennern. Hier addire man z. B. die oben §. 154. ſchon unter einerlei Benennung gebrachten drei Brüche, in dem man nur die Zähler zuſammenrechnet; oder man nehme ein Exempel mit 2 Brüchen. Z. B.

$$\frac{a}{d} + \frac{f}{g} = \frac{ag}{dg} + \frac{df}{dg} = \frac{ag + df}{dg}$$

§. 156. Brüche zu ſubtrahiren.

1) Mit einerlei Nennern.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

Mit

Mit verſchiedenen Nennern.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd.}$$

§. 157. Brüche zu multipliciren.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd.}$$

§. 158. Brüche zu dividiren.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc.}$$

Brüche, deren Nenner zuſammengeſetzt ſind, laſſe ich weg.

Anwendung der Buchſtabenrechnung auf Potenzen.

§. 159. Als Zugabe zu der Lehre von den Potenzen, wovon ſchon oben (§. 56—63.) gemeldet worden, und zugleich als Fingerzeig, wie die Buchſtabenrechnung bei den Potenzen angewandt werden kann, erſcheinen nachſtehende Paragraphen.

§. 160. Das Product aus zwo gleichen Größen heißt Quadrat, oder die zweite Potenz. Die Zahl, die mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, heißt die Wurzel, und iſt die erſte Potenz.

Z. B. 9 iſt das Quadrat der Wurzel 3;

$aa = a^2$ iſt das Quadrat der Wurzel a.

§. 161. Das Product aus drei gleichen Größen oder Zahlen heißt Cubus, oder die dritte Potenz der Wurzel.

Z. B. 9 · 3 = 27 iſt der Cubus von der Wurzel 3;
aaa $= a^3$ iſt der Cubus der Wurzel a.

§. 162. Das Product aus vier gleichen Zahlen oder Größen heißt Biquadrat, oder die vierte Potenz.

Z. B. 27 · 3 = 81 iſt das Biquadrat von der Wurzel 3;
aaaa $= a^4$ iſt das Biquadrat von der Wurzel a u. ſ. w.

§. 163. Es kann aber nicht nur ein jeder einzelner Buchſtab, ſondern auch ein jeder zuſammengeſetzter Ausdruck, die Wurzel oder die erſte Potenz ſeyn, und ſo zu höhern Potenzen erhoben werden. Z. B. Iſt ay die Wurzel, ſo iſt die Cubikzahl oder die dritte Potenz davon aaayyy $= a^3 y^3$. Oder es ſei a + b die Wurzel, ſo iſt aa + 2ab + bb $= a^2 + 2ab + b^2$ das Quadrat derſelben.

§. 164. Wenn gleich bei Potenzen ein Buchſtab mehrmal geſchrieben werden ſoll, ſo pflegt man denſelben doch nur einmal zu ſchreiben, und mit einer kleinen Zahl, der Exponent genannt, oberhalb des Buchſtabens rechter Hand anzudeuten, wie oftmals er hätte geſchrieben werden ſollen, z. B. aaaaa wird geſchrieben a^5, und geleſen

a in der fünften Potenz; aayyy wird geſchrieben a^2y^3, und geleſen a in der zweiten Potenz mal y in der dritten Potenz.

§. 165. Eine jede Größe für ſich allein, oder in der erſten Potenz muß eigentlich, nach dieſer Art die Potenz auszudrücken, 1 zum Exponenten haben, d. i. $a = a^1$. Der Exponent 1 aber wird nie als zu beſondern Abſichten ausgedrückt.

§. 166. Wenn aber endlich zuſammengeſetzte Größen zu Potenzen erhoben werden ſollen, ſo muß man die ganze Wurzel erſt in Klammern einſchließen, und alsdann den Exponenten neben der Klammer ſetzen. Z. B. axy ſoll zur dritten Potenz erhoben werden, ſo ſchreibt man $(axy)^3$; oder $a + b$ ſoll quadrirt, d. i. in ein Quadrat erhoben werden, ſo ſchreibt man $(a + b)^2$.

§. 167. Man kann die Potenzen addiren, ſubtrahiren, multipliciren, dividiren. Denn entweder ſind ſie gleichnamig oder nicht. Sind ſie nicht gleichnamig, ſo geſchehen die vier Rechnungsarten mit den Zeichen, wovon ſchon geſagt worden. Denn a^3 zu b^2 addirt iſt $a^3 + b^2$;

von a^3 ſubtrahirt b^2, iſt $a^3 - b^2$;

a^3 mit b^2 multiplicirt, iſt $a^3 . b^2$;

a^3 mit b^2 dividirt, iſt $a^3 : b^2$ oder $\frac{a^3}{b^2}$.

Sind ſie aber gleichnamig, ſo wird die Addition und Subtraction wie in Zahlen verrichtet.

Z. B. $3a^3 + a^3 = 4a^3$; $3a^3 - a^3 = 2a^3$.

Bei der Multiplication und Diviſion aber bemerkt man folgende Regeln:

§. 168. Bei der Multiplication der gleichnamigen Potenzen werden die Exponenten addirt, und die Summe iſt das Product.

Z. B. $a^3 . a^2 = aaa . aa$

$aaa . aa = aaaaa$

$aaaaa = a^5$

$a^3 . a^2 = a^5$.

Wenn man alſo die Exponenten 3 und 2 addirt, ſo hat man das Product von $a^3 . a^2$.

§. 169. Bei der Diviſion wird der Exponent des Diviſors von dem Exponenten des Dividendus abgezogen; die Differenz iſt der Quotient.

denn $a^5 : a^3 = \frac{aaaaa}{aaa}$

$\frac{aaaaa}{aaa} = aa$

$aa = a^2$

$a^5 : a^3 = a^2$

$a^2 = a^{5-3}$

$a^5 : a^3 = a^{5-3}$.

Fol-

Folglich bekommt man den Quotienten, wenn man den Exponenten des Diviſors vom Exponenten des Dividendus ſubtrahirt.

§. 170. Wenn die Exponenten allgemeine Zeichen wie m und n ſind, ſo iſt $x^m . x^n = x^{m+n}$ und $x^m : x^n = x^{m-n}$.

§. 171. Eine Gröſſe, die unverändert bleibt, und nicht mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, läßt ſich alſo durch x^1 ausdrücken. Zuweilen hat man einen Nutzen, wenn man die 1 ſetzt; z. B. $x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1$. Meiſtentheils aber läßt man die Einheit weg, und ſchreibt für x^1 nur x; das iſt x in der erſten Potenz.

§. 172. Eine Potenz, deren Exponent Null, iſt allezeit eins,

$$x^0 = 1, \text{ denn}$$
$$x^0 = x^{1-1}$$
$$x^{1-1} = x^1 : x^1$$
$$x^1 : x^1 = x : x$$
$$x : x = \frac{x}{x}$$
$$\frac{x}{x} = 1$$

$$x^0 = 1.$$

alſo die Ausdrücke 1; $\frac{x}{x}$; x^0 ſind einerlei Ausdrücke und alle einander gleich.

§. 173. Wenn der Exponent des Diviſors größer iſt, als der Exponent des Dividendus, ſo wird der Exponent des Quotienten negativ, z. B. $x^2 : x^5 = x^{2-5} = x^{-3}$.

§. 174. Eine Potenz mit einem negativen Exponenten iſt einem Bruch gleich, deſſen Zähler eins, und deſſen Nenner die nemliche Potenz mit dem poſitiven Exponenten iſt.

Z. B. $x^{-1} = \frac{1}{x}$;

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$;

und überhaupt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; daher x^{-n} und $\frac{1}{x^n}$ gleichgültige Ausdrücke ſind.

§. 175. Zuſammengeſetzte Potenzen werden auf eben dieſe Weiſe behandelt, denn $a^2 x^3 . ax = a^3 x^4$, weil $aaxxx . ax = aaaxxxx = a^3 x^4$.

§. 176. Iſt der Exponent unbeſtimmt, ſo iſt aus gleichem Grund

$$x^n . x^2 = x^{n+2};$$
$$x^n . x = x^{n+1};$$
$$x^n : x = x^{n-1}.$$

§. 177. Potenzen laſſen ſich zu höhern Graden erheben, wenn man ihre Exponenten mit dem Exponenten des verlangten Grads multiplicirt; denn

denn a^3 zum vierten Grad erhoben, iſt nichts anders, als a^3 viermal mit ſich ſelbſt multiplicirt.

Z. B. $a^3 . a^3 . a^3 . a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$. Eine Zahl aber etlichemal zu ſich ſelbſt addiren, heißt ſie multipliciren, folglich darf man nur den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten des verlangten Grades multipliciren, ſo hat man die geſuchte Potenz.

Z. B. $a^{3 . 4} = a^{12}$, der vierte Grad von a^3.

§. 178. Im allgemeinen Ausdruck wird daher auch ſeyn der nte Grad von $x^m = x^{mn}$.

§. 179. Sind die Potenzen zuſammengeſetzt, ſo iſt aus gleichem Grunde der dritte Grad von $x^2 y^3 = x^6 y^9$ und der nte Grad von $x^m y^r = x^{mn} y^{nr}$.

§. 180. Auch bei negativen Größen bleibt die Regel, denn x^{-2} im 3ten Grad, $= x^{-6} = \frac{1}{x^6}$;

und z^{-n} im mten Grad iſt $x^{-nm} \frac{1}{x^{nm}}$.

§. 181. Die Wurzel aus einer Potenz läßt ſich ausdrücken, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt.

$$\sqrt[3]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^{4 . 3}}.$$

Gleichwie nun x^{12} entſteht, wenn man x^4 dreimal mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo muß x^4, die

Cubikwurzel aus x^{12}, wieder herauskommen, wenn man x^{12} wieder mit 3 dividirt.

§. 182. Sind hinter dem Wurzelzeichen Zahlen, ſo muß man die Zahl in ihre Factores geſchickt und ſo zerfällen, daß eine ein vollkommenes Quadrat oder Cubus wird, je nachdem man eine Quadrat- oder Cubikwurzel verlangt.

Z. B. $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot 5 = 3\sqrt{5}$.

§. 183. Sind **vor** dem Wurzelzeichen Zahlen, ſo wird bei der Multiplication ihr Product auch in die Wurzelgröße multiplicirt.

Z. B. $3\sqrt{2}.\ 2\sqrt{7} = 3 \cdot 2\sqrt{2.\ 7} = 6\sqrt{14}$.

Sind die Wurzelgrößen zuſammengeſetzt, ſo verfährt man wie folgt:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2}).\ (\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$$
$$\sqrt{9} + \sqrt{6}$$
$$- \sqrt{6} - \sqrt{4}$$
$$\overline{\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.}$$

Eben ſo macht man es bei der Diviſion, denn

$$\frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

Sechster Abſchnitt.

Von Decimalbrüchen.

§. 184. Ein Decimalbruch iſt ein Bruch, deſſen Nenner eine Potenz der Zehn ſind. Z. B. $\frac{3}{10}$;

$\frac{3}{10}$; $\frac{4}{100}$; $\frac{6}{1000}$ ſind Decimalbrüche, welche zuſammengeſetzt $\frac{346}{1000}$ heißen. Man läßt aber, um alle Weitläufigkeit zu vermeiden, die Nenner im Schreiben weg, weil man ſie leicht hinzudenken kann. Der Nenner iſt nemlich allemal die Einheit mit ſo viel angehängten Nullen, als der Zähler Zahlzeichen hat. Die ganzen Zahlen vor den Decimalbrüchen werden mit einem Comma (,), oder Punct (.) von den Brüchen abgeſondert. Wenn kein Ganzes vorhanden iſt, ſo kommt eine Nulle an die Stelle, z. B. 0, 347 = 0, $\frac{347}{1000}$, d. i. kein Ganzes, 3 Zehntheile, 4 Hunderttheile, 7 Tauſendtheile.

§. 185. Ein jeder Bruch kann in Decimalbrüche verwandelt werden, wenn man dem Zähler ſo viele Nullen anhängt, auf wie viel Ziffer man die zehntheilige Brüche fortſetzen will (in ſo fern ſich die Rechnung nicht ſelbſt endigt), und hernach durch den Nenner dividirt. Der Bruch bleibt einerlei, wenn oben und unten mit Gleichem multiplicirt wird; es geſchieht aber dieſes, wenn man Nullen anhängt und dividirt, denn $\frac{1}{2} = \frac{1'0}{2}$ = 0, 5 = 0, $\frac{5}{10}$, weil $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10}$ und alſo ein Decimalbruch $\frac{1}{4} = \frac{100}{4}$ = 0, 25 = 0, $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25}$.

§. 186. Wenn der Bruch durch die Diviſion nicht genau ſich ausdrücken läßt, ſo ſucht man ſeinem wahren Werth ſo nahe zu kommen, daß

der Fehler kaum ein Millionentheilgen betrifft, z. B. $\frac{1}{3} = \frac{1,0000}{3} = 0,33333 \ldots = 0,\frac{33333}{100000}$. Der Fehler iſt hier kaum ein Milliontheil eines Ganzen.

§. 187. Man kann alle vier Rechnungsarten bei den Decimalbrüchen anbringen. Der Beweiß gründet ſich auf die Lehre von den Potenzen, deren Exponenten negativ ſind (§. 56—63).

1) Addition.

$$\frac{3}{7} = 0,42857$$
$$\frac{4}{7} = 0,57142$$

$$\frac{7}{7} = 1 = 0,99999$$

Man addirt von der Rechten zur Linken. Weil aber die beiden Brüche, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, ſelbſt nicht genau in Decimalbrüchen gegeben ſind, ſo iſt auch in der Summe ein Fehler, von Einem Hunderttauſendtheilgen, den man für Nichts achten darf. Eigentlich ſollten 1,00000 herauskommen, weil $\frac{7}{7} = 1 = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$.

2) Subtraction.

$$\frac{5}{4} = 1,25$$
$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = 0,75 = \frac{1}{4}.$$

Man ſubtrahirt, wie gewöhnlich; wenn aber bei einer Zahl keine Ziffer ſteht, wie bei 5, ſo denkt man ſich eine Nulle hinzu. Z. B. $\frac{1}{2} = 0,5$

oder

oder $\frac{1}{2} = 0, 50$, weil $\frac{50}{100} = \frac{5}{10}$, folglich ſagt man 0 von 5; 5 von 12; 0 von 0.

3) Multiplication.

$\frac{5}{4} = 1, 25$
$\frac{8}{5} = 1, 6$

1, 25
0, 750

$\frac{40}{20} = 2, 000.$

Hier hat man mit der linken Zahl des untern Factors zu multipliciren angefangen

1, 25
1, 6

0, 750
1, 25

2, 000.

Hier hat man mit der rechten Zahl des untern Factors zu multipliciren angefangen; es iſt zwar einerlei, doch iſt die erſte Manier gewöhnlicher.

4) Diviſion.

1, 600 = 2, 56
(0, 625)
1, 250

0, 35·0·0
(0,6 2 5)
3 1 2 5

---

3 7 5 0
(0,6 2 5)
3 7 5 0

0

Die

Die Diviſion iſt wie bei der gewöhnlichen Art unter ſich zu dividiren, nur muß man, ſo lang die Diviſion fortgeſetzt wird, jedesmal eine Nulle dem Reſt des Dividendus anhängen, weil durch die angehängte Nulle die Decimalprogreſſion von ſelbſt ſich beſtimmt. Geht die Diviſion ohne Ende fort, ſo hört man da auf, wo man glaubt, daß der Fehler klein genug und kaum merklich ſei.

Siebenter Abſchnitt.

Von Sexageſimalbrüchen.

§. 188. Sexageſimalbrüche ſind ſolche Brüche, wenn ein Ganzes in 60 Theile, und jeder Theil wieder in 60 u. ſ. w. getheilt wird. Man theilt z. B. eine Stunde in 60 Minuten, eine Minute in 60 Sekunden u. ſ. w. Man ſchreibt die Sexageſimalbrüche, wie in der Geometrie die Minuten, Sekunden und Terzen u. ſ. w. 4 St. 50′ 20″ 30‴ ſind 4 St. $+ \frac{50}{60} + \frac{20}{60.60}$ $\frac{30}{60.60.60}$ einer Stunde, welche als die Einheit betrachtet wird; und weil 60 allemal auf die Einheit gehen, ſo kann man den obigen Ausdruck (4 St. 50′ 20″ 30‴) auch ſo ſchreiben: $4.60 + 50 + \frac{20}{60} + \frac{30}{60.60}$.

Man kann auch bei dieſen Brüchen die vier Rechnungsarten anwenden, nur muß man von der nächſten höhern Stelle das Entlehnte nach der Sexageſimalprogreſſion nehmen, weil eine Ein-

Einheit der höhern Ordnung nicht 10, ſondern 60 von der unmittelbar niedern enthält.

a) Addition.

6 St.	04′	32″	08‴
20 St.	12′	50″	16‴
26 St.	17′	22″	24‴

Die Terzen (24) werden ganz hingeſetzt; die 82 Sekunden geben 1 Minute und 22 Sekunden; die 16 Minuten nebſt der übrig behaltenen machen 17 Minuten. Die Stunden bleiben von ſelbſt.

b) Subtraction.

12 St.	18′	52″	07‴
3 St.	20′	04″	12‴
8 St.	58′	47″	55‴.

c) Multiplication.

Soll man 17 Stunden mit 46 Terzen multipliciren, ſo merkt man auf §. 188. und das im Zeichen ausgedruckte Product iſt alsdenn

$= 17.60. \frac{46}{60 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{17 \cdot 46 \cdot}{60 \cdot 60 \cdot} = \frac{782}{60 \cdot 60} = 782''$
$= 13'\ 2''.$

d) Diviſion.

$$33' : 16''. = \frac{33}{60} : \frac{16}{60 \cdot 60}$$
$$= \frac{33}{60} \cdot \frac{60 \cdot 60}{16} = \frac{33 \cdot 60}{16}$$
$$= 123 + \frac{12}{16}.$$

Achter

Achter Abſchnitt.

Von Ausziehung der Quadratwurzeln und Cubikwurzeln.

§. 189. Die Benennung Quadrat, der zweiten Potenz einer Zahl, kommt daher, weil die Einheiten der zweiten Potenz einer Zahl ſich ſo zuſammenſetzen laſſen, daß ſie eine Figur bilden, die man in der Geometrie ein Quadrat nennt. Was die Seite eines Quadrats in der Geometrie genannt wird, heißt hier die Wurzel, d. i. die Zahl, die, noch einmal mit ſich multiplicirt, die zweite Potenz gibt.

§. 190. **Wenn eine Zahl aus zween Theilen beſteht, ſo enthält ihr Quadrat das Quadrat des erſten Theils, ein doppeltes Product aus dem erſten Theil in den andern, und das Quadrat des andern Theils.**

Das Exempel (§. 143. Nro. 3.) giebt hievon einen Beweis.

§. 191. Wenn der erſte Theil einer Zahl a ein Zehner, und der zweite b ein Einer iſt, ſo fängt ſich das Quadrat des erſten Theil in der Stelle der Hunderter an, d. i. es hat daſelbſt ſeine niedrigſte Ziffer, und kann nur bis in die Stelle der Tauſender gehen, weil es höchſtens zwo Ziffer haben kann. Das doppelte Product fängt

fängt in den Zehnern an, und geht höchſtens bis in Tauſender. Das Quadrat des zweiten Theils fängt ſich in den Einern an, und geht höchſtens bis in die Zehner.

ab	
36	
36	
36	$= b^2$
18	$= ab$
18	$= ab$
9	$= a^2$
1296	$= a^2 + 2ab + b^2$.

§. 192. Die kleinſte Zahl mit drei Ziffern iſt 100, und ihr Quadrat iſt 10,000 die kleinſte Zahl mit fünf Ziffern. Alſo hat von jeder Zahl, die mit mehr als zwo Ziffern geſchrieben wird, das Quadrat mehr als vier Ziffern.

§. 193. Von einer Zahl, die drei oder vier Ziffern hat, muß die Quadratwurzel zwo Ziffern, und nicht mehr haben.

§. 194. Wenn man aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel ausziehen will, ſo theile man dieſe Zahl in Claſſen von der Rechten gegen die Linke zu, und gebe jeder zwo Ziffern (dann ſo viele Theile hat die Wurzel, als Claſſen herauskommen), in der letzten Claſſe zur Linken kann auch eine Ziffer ſtehen. Von dieſer letzten Claſſe zur

Linken

Linken ſuche man das Quadrat, das der Zahl in beſagter Claſſe am nächſten kommt, in dem Wurzeltäfelein auf, ziehe es von den Zahlen dieſer Claſſe ab, und ſetze die dazu gehörige Wurzel in die Stelle des Quotienten, als den erſten Theil. Dieſen erſten Theil oder Quotienten duplire man, und dividire damit den Reſt, nebſt der dazu geſetzten zwoten Claſſe; der dadurch entſtehende zweite Quotient iſt der zweite Theil. Eben dieſen zweiten Theil oder Quotienten ſetze man neben den Diviſor, und multiplicire ihn ſowohl mit ſich ſelbſt, als mit dem Diviſor. Diß Product aus dem zweiten Theil in den Diviſorem, und das Quadrat des zweiten Theils ziehe man von dem dividirten Reſt ab, und was übrig bleibt, nebſt der dazu geſetzten dritten Claſſe, dividire man mit dem erſten und zweiten Quotienten, der nur für einen Theil angeſehen, aber zweimal genommen wird. Der neue oder dritte Quotient werde ebenfalls neben den Diviſorem geſetzt und wie das erſtemal multiplicirt. Nach Abzug des Products von dem dividirten vorigen Reſt ſetze man den neuen Reſt und die vierte Claſſe herunter, die drei Quotienten, zweimal genommen, als Diviſorem darunter, und verfahre, wie geſagt. Dieſe Operation wird ſo lange fortgeſetzt, bis entweder die Wurzel ſich genau ergiebt, oder bis man, wenn ſie nicht genau gefunden werden kann, durch Anhängen je zwoer

Nullen,

Nullen, die Diviſion in Decimalbrüchen ſo lang fortgeſetzt hat, als man für nöthig findet, um etwa den Fehler auf Millionentheilchen herabzuſetzen, daß er kaum merklich iſt.

```
Quadrat. 1|70|30|25 [ 1305 Quadratwurzel.
         1|  |  |   [
  ——————
      7'0
     (2 3)
      6 9
   ——————
       1|30
      (2 60)
       0 00
     ——————
         130|25
        (26 05)
         130 25
     ———————————
            0 0
```

§. 195. Will man die Quadratwurzel aus einer Zahl, die kein vollkommenes Quadrat iſt, ausziehen, ſo geſchieht ſolches durch Näherung, indem man der gegebenen Zahl ſo vielmal je und je zwo Nullen anhängt, als man glaubt, daß zur Näherung genug ſey. Bey den angehängten Nullen iſt es aber nicht nöthig, im Quotienten die Nenner, welche in den Decimalbrüchen fortgehen, würklich zu ſchreiben, wenn man nur durch ein Strichlein (,) nach den ganzen Zahlen anzeigt, daß jetzo die Decimalbrüche anfangen.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Quadrat. 3 [1, 73205 .... Quadratwurzel.
1

2'|0'0
(27)
1 89

1 1'|0'0
(3 43)
10 29

7'1'|0'0
(3 4 62)
69 24

1 76|00
(3 4640)
0 0000

1 76'0'0|0'0
(346405)
1 732025

27975 u. ſ. w.

§. 196. Wenn man die gefundene Wurzel mit ſich ſelbſt multiplicirt, und was übrig geblieben, zum Product addirt, ſo muß die gegebene Zahl wieder herauskommen; dieſe Operation nennt man die Probe der Quadratrechnung.

Z. E. 173205. 173205 + 27975 = 3,0000000000.

In dem letzten Exempel kommt 3 mit ſo viel Nullen heraus, als angehängt waren.

§. 197. Wenn man aus einem Bruch die Quadratwurzel ziehen will, ſo muß man ſie ſowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner ziehen. (Z. E. $\sqrt{\frac{25}{49}}$ iſt $\frac{5}{7}$)

§. 198. Die Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen, heißt, diejenige Zahl finden, die, durch ihre Quadratzahl multiplicirt, die gegebene Zahl hervorbringt.

(Die Cubikwurzel aus 64 ziehen, heißt die Zahl 4 finden, die durch ihr Quadrat 16 multiplicirt, 64 macht).

§. 199. Ein jeder Cubus von $a+b$ oder $(a+b^3)$ würklich ausgedruckt, heißt $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; daher beſteht er aus dem Cubus des erſten Glieds, aus dem dreifachen Product des Quadrats des erſten Glieds in das zweite, aus dem dreifachen Product des erſten Glieds in das Quadrat des zweiten, und aus dem Cubus des zweiten Glieds.

§. 200. Wenn man aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel ausziehen will, ſo theile man dieſe Zahl in Claſſen von der Rechten gegen die Linke, und gebe jeder Claſſe drei Ziffern, (dann ſo viel Theile hat die Wurzel, als Claſſen heraus kommen) die letzte Claſſe zur Linken kann auch zwo oder eine Zahl haben. Im Wurzeltäfelein ſuche man die Cubikzahl, welche derjenigen, ſo in der letzten Claſſe zur Linken ſteht, am nächſten kommt,

ziehe ſie davon ab, und ſetze die dazu gehörige Wurzel in die Stelle des Quotienten. Dieſen Quotienten, als den erſten Theil der Wurzel, multiplicire man mit ſich ſelbſt, und das herauskommende Quadrat mit 3, ſetze das Product unter den Reſt des Cubus und unter die herunter geſetzte folgende Claſſe ſo, daß die letzte Ziffer unter die erſte der herabgeſetzten Claſſe, und die erſte Ziffer unter den Reſt zu ſtehen komme, und dividire, ſo kommt der andere Theil der Wurzel heraus. Mit dieſem multiplicire man in den Diviſor, und ſetze das Product unter denſelben. Man multiplicire alsdann das Quadrat des zweiten Quotienten mit dem erſten Quotienten, nehme dieſes Product 3 mal, und ſetze es um eine Zahl weiter zur Rechten; endlich erhebe man den zweiten Quotienten zum Cubus, und ſetze ihn abermal um eine Ziffer näher zur Rechten. Die drey Partialproducte addire man, und ziehe die Summe von den unmittelbar über den Partialproducten und dem Diviſor ſtehenden Zahlen ab. Bleibt etwas übrig, ſo ſetzt man neben dieſen Reſt die folgende Claſſe, macht ſich einen neuen Diviſor, indem man die zween Quotienten für Einen anſieht, ein Quadrat daraus macht, dieſes mit 3 multiplicirt und ſo dividirt. Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo findet man endlich die verlangte Cubikzahl.

Z. E.

Cubus. 4 7 | 4 37 | 928 [362 Cubikwurzel.
2 7

2'0' | 4'37

Divisor.	(2 7)	=	$3a^2$
Partialprod.	16 2	=	$3a^2b$
	3 2 4	=	$3ab^2$
	2 16	=	b^3

Summe 196 56

Rest 781 | 928

Neuer Divisor.	(388 8)	=	$3a^2$
Partialprod.	777 6	=	$3ab^2$
	4 32	=	$3ab^2$
	8	=	b^3

Summe 781 928

Rest 0 0

§. 201. Wenn man die Wurzel nicht genau finden kann, ſo ſucht man ſie durch Näherung, hängt, ſo oft man will, je drei und drei Nullen der gegebenen Zahl an, und verfährt, wie oben geſagt.

Z. E.

Cubus. 67 [4,061 . . . . . . Cubikwurzel.
64

3 | 000
Divisor. (4 8)
0000

3·0·0·0·|0·0·0
(4800) = $3a^2$
28800 = $3a^2b$
Partial- 4320 = ab^2
producte. 216 = b^3

Summe. 2923416

Reſt. 7·6584·|0·0·0
(494508) = $3a^2$
494508 = $3a^2b$
1218 = $3ab^2$
1 = b^3

Summe. 49462981

Reſt. 27121019 u. ſ. w.

Bei dieſem Exempel nähert man ſich, durch angehängte Nullen, dem wahren Werth der Wurzel in Decimalbrüchen ſo, daß der Fehler endlich unmerklich wird.

§. 202. Wenn man die Cubikwurzel wieder cubirt, d. i. 3 mal mit ſich ſelbſt multiplicirt, und den Reſt zum Product addirt, ſo muß die gegebene Zahl wieder herauskommen; diß iſt die Probe der Cubikrechnung.

Z. B.

Z. B. 362. 362. 362 = 47437928 (§. 199.):
Ferner 4061. 4061. 4061. + 27121019
= 67,000000000 (§. 200.).
Es kommt alſo im letztern Fall die Zahl 67 mit den — in der Rechnung nach und nach angehängten Nullen wieder heraus.

§. 203. **Die Theile eines Quadrats zu finden, wenn die Wurzel aus mehr als zween Theilen beſteht.**

1) Die dreitheilichte Wurzel
ſei $f + g + h$; und
$f + g = a$
$h = b$,
ſo iſt laut §. 190.

$$a^2 = f^2 + 2fg + g^2$$
$$2ab = 2.(f + g).h$$
$$b^2 = h^2$$

alſo iſt das Quadrat der dreitheilichten Wurzel

$$f^2 + 2fg + h^2 + 2.(f + g).h + h^2$$
$$= A + 2.(f + g).h. + h^2 = B.$$

2) Die viertheilichte Wurzel
ſei $f + g + h + i$, und
$f + g + h = a$
$i = b$,
ſo iſt ihr Quadrat

$$B + 2.(f. + g + h).i + i^2 = C.$$

3) Die fünftheilichte Wurzel
ſei $f + g + h + i + k$, und
$f + g + h + i = a$
$k = b$,
ſo iſt ihr Quadrat
$C + 2.(f + g + h + i).k + k^2 = D$;
oder
I. $f^2 + 2fg + g^2$
II. $+ 2.(f + g).h + h^2$
III. $+ 2.(f + g + h).i + i^2$
IV. $+ 2.(f + g + h + i).k + k^2$.

In der Zeile I. ſteht das Quadrat der zweitheilichten Wurzel $= A$; in den Zeilen I. II. zuſammen das Quadrat der dreitheilichten $= B$; in den Zeilen I. II. III. zuſammen das Quadrat der viertheilichten $= C$; in den Zeilen I. II. III. IIII. zuſammen das Quadrat der fünftheilichten $= D$. Käme zu der Wurzel noch ein Theil $= l$, ſo käme für ihr Quadrat, zu dieſen vier Zeilen, noch eine
$2.(f + g + h + i + k).l + l^2$.
Hieraus erhellt, daß dieſes ohne Ende nach folgendem Geſetze fortgehe:

Wenn zu der Wurzel ein neuer Theil kommt, ſo kommen zu dem Quadrat zwei Stück, nemlich ein doppeltes Product aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen, und das Quadrat des neuen Theils. Wenn alſo eine vieltheilichte Wurzel um einen Theil

wächst,

wächſt, ſo kommt zu ihrem Quadrat etwas hinzu, wie zu dem Quadrat einer eintheilichten Wurzel kommt, wenn eine zweitheilichte aus ihr wird. Was hier der zweite Theil iſt, iſt dorten der neue: ſtatt des dortigen erſten, iſt hier die Summe aller vorhergehenden. Man kann alſo dieſes Geſetz ſo ausdrücken: **Man ſehe die Wurzel als eine zweitheilichte an, da die Summe aller Theile, den letztern ausgenommen, der erſte Theil, und der letzte Theil der zweitheilichten zweiter Theil wäre.**

§. 204. Jedes Quadrat beſteht aus den Quadraten aller Theile der Wurzel, und aus den doppelten Producten der Summen aller erſten Theile in jeden nächſtfolgenden.

§. 205. Es ſei q eine ganze Zahl, die ſich nicht durch die kleinere ganze Zahl r dividiren läßt, alſo $\frac{q}{r}$ ein uneigentlicher Bruch, der ſich nicht auf eine ganze Zahl bringen läßt. Das Quadrat eines ſolchen Bruchs, wird keine ganze Zahl ſeyn.

Das Quadrat $\frac{qq}{rr}$ ſei gleich ſ einer ganzen Zahl, ſo iſt $\frac{qq}{r} = ſr$ einer ganzen Zahl; qq muß ſich alſo durch r dividiren laſſen, d. i. r muß ein Factor des Products qq ſeyn. Es iſt aber, wie angenommen wird, kein Factor von r, es muß

ſelbſt ein Product von zween Factoren ſeyn, deren einer von dem einen q, der andere von dem andern q iſt, ſo wird das Product beider q das Product r enthalten. Weil aber ein q mit dem andern q einerlei iſt, ſo kann das eine q keinen Factor von r enthalten, den das andere q nicht auch enthielte, und alſo iſt entweder in keinem q ein Factor von r enthalten, oder das ganze r iſt als ein Factor in jedem q enthalten. Das letzte ſoll nicht ſeyn, alſo findet das erſte ſtatt, und folglich iſt r kein Factor von qq, alſo iſt auch $\frac{qq}{rr}$ keine ganze Zahl.

§. 206. Eine Zahl, die aus einer ganzen und einen eigentlichen Bruch beſteht, läßt ſich auf einen uneigentlichen von der Beſchaffenheit §. 204. bringen, und hat alſo zu ihrem Quadrat keine ganze Zahl.

§. 207. Wenn die Quadratwurzel einer ganzen Zahl größer, als eine gewiſſe ganze Zahl A, und kleiner als A + 1 iſt, ſo gibt es keinen eigentlichen Bruch, der an A gehenkt dieſe Wurzel völlig genau darſtellte. Solche Wurzeln laſſen ſich alſo weder durch ganze Einheiten, noch durch Theile der Einheit vollkommen richtig ausdrucken; man heißt ſie Irrationalzahlen, ſo wie man Rationalzahlen diejenigen nennt, welche ſich durch ganze Einheiten, oder Theile derſelben ausdrucken laſſen; und hieher gehören alſo die ganzen Zahlen und beiderlei Brüche, wenn ſich Zähler

ler und Nenner von ihnen völlig angeben laſſen. Zu Irrationalzahlen wird erfordert, daß kein Theil der Einheit ſie mißt, oder in ihnen einigemal genau nach einer ganzen Zahl enthalten iſt; denn ſonſt gibt es Rationalzahlen, die von gewiſſen Theilen der Einheit nicht gemeſſen werden, ob es gleich andere thun.

Wie man aus einer ganzen Zahl, deren Quadratwurzel keine ganze Zahl iſt, dieſe Wurzel durch Näherung ausziehen ſoll, iſt oben §. 195. geſagt worden.

§. 208. Den Würfel einer Wurzel, die drei oder mehr Theile hat, zu finden.

Wenn eine dreitheilichte Wurzel

$f + g + h$, und

$f + g = a$,

$h = b$ iſt,

ſo iſt

$$a^3 = (f + g)^3 = f^3 + 3f^2g + 3fg^2 + f^3$$

$$3a^2b = 3.\,(f + g)^2.\,h$$

$$3ab^2 + b^3 = 3.\,(f + g).\,h^2 + h^3.$$

Hieraus erhellt, daß der Würfel einer vieltheilichten Wurzel die Würfel aller Theile, die dreifachen Producte aus dem Quadrat jeder Summe aller vorhergehenden Theile in den nächſtfolgenden, und die dreifachen Producte aus jeder Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächſtfolgenden enthalte.

Es

Es ſei $M = f + g + h + i + k$, wo ſo viel Theile, als man will, folgen mögen.

Ferner ſei

$A = (f + g)^3 = f^3 + 3fg^3 + 3fg^2 + g^3$;

$B = (f + g\ h)^3$;

$C = (f + g + h + i)^3$;

$D = (f + g + h + i + k)^3$;

ſo kann man, wenn man B finden will, $f + g$ als den erſten Theil, und h als den andern Theil der Wurzel anſehen, alſo iſt

$$B = A + 3 . (f + g)^2 . h + 3 . (f + g)\ h^2 + h^3;$$

man kann, wenn man C finden will, $f + g + h$ als den erſten Theil der Wurzel, und i als den zweiten anſehen, und man bekommt

$$C = B + 3 . (f + g + h)^2 + 3 . (f + g + h) . i^2 + i^3.$$

Für D ſind $f + g + h + i$ zuſammen der erſte Theil, und k der andere, alſo iſt

$$D = C + 3 . (f + g + h + i)^2 . k + 3 . (f + g + h + i) . k^2 + k^3.$$

Der Würfel von M iſt alſo A, B, C, D u. ſ. w. nachdem die Wurzel 2, 3, 4 u. ſ. w. Theile hat. Man kann nemlich allezeit alle Theile der Wurzel weniger dem letzten $= a$ und dem letzten $= b$ ſetzen.

§. 209. Von $\frac{q}{r}$ kann der Würfel keine ganze Zahl ſeyn.

Der

Der Würfel $\frac{q}{r}$ ſei gleich ſ einer ganzen Zahl, ſo iſt $\frac{q^3}{r} = ſr^2$ eine ganze Zahl. Alſo müſte, wie oben (§. 205.), jedes der drei q einen Factor von r enthalten, und wenn jedes einen Factor enthält, ſo enthält es die andern beiden auch, wider das, was angenommen wird.

§. 210. Wie man aus einer ganzen Zahl, deren Cubikwurzel keine ganze Zahl iſt, dieſe Wurzel durch Näherung finden ſoll, iſt oben §. 201. geſagt worden.

Neunter Abſchnitt.

Von Verhältniſſen.

§. 211. Ein Verhältniß entſteht durch die Vergleichung zweier Zahlen oder Größen.

§. 212. Dieſe Vergleichung geſchieht entweder durch die Subtraction oder Diviſion.

§. 213. Wenn ſie durch die Subtraction geſchieht, ſo drückt man ſie durch das Zeichen der Subtraction (—) aus; geſchieht ſie aber durch die Diviſion, ſo drückt man ſie durch das Zeichen der Diviſion (:) aus.

§. 214. Die zwei Zahlen in jedem Verhältniß heißt man Glieder. Das eine Glied ſieht man als das vorhergehende, und das andere als das nachfolgende an; die Ordnung iſt willkührlich.

§. 215.

§. 215. Zwei Verhältniſſe, deren Glieder einerlei Differenz oder einerlei Quotienten haben, ſind ähnliche und auch gleiche Verhältniſſe.

Z. E. $5 - 2 = 7 - 4$, wie auch
$16 : 4 = 12 : 3$.

1) Arithmetiſches Verhältniß.

§. 216. Wenn man durch die Subtraction unterſucht, um wie viel eine Zahl größer, als die andere iſt, ſo betrachtet man dieſe beiden Zahlen in ihrem arithmetiſchen Verhältniß.

(Z. E. $20 - 5 = 15$)

§. 217. Wenn zwei Paar Zahlen einerlei Unterſcheid haben, ſo hat das vorhergehende Glied zum folgenden bei dem einen Paar eben das arithmetiſche Verhältniß, wie bei dem andern; man kann ſie alſo gleich oder ähnlich nennen, weil ſie ſich durch Nichts unterſcheiden.

(Z. E. $20 - 15 = 35 - 30$)
$a - (a + d) = b - (b + d)$.

2) Geometriſches Verhältniß.

§. 218. Wenn man durch die Diviſion unterſucht, wie vielmal eine Zahl in der andern enthalten iſt, oder was für ein Theil von der einen in der andern ſteckt, ſo betrachtet man ſie in ihrem geometriſchen Verhältniß.

(Z. E. $6 : 2 = 3$; und $15 : 5 = 3$)

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſo hat a zu b eben das Verhältniß wie c zu d.

§. 219.

§. 219. Der Quotient, welcher andeutet, wie vielmal die kleinere Zahl in der größeren enthalten iſt, heißt der Name des Verhältniſſes, oder Exponent.

§. 220. Wenn bei dem Wort: Verhältniß kein Beyname ſteht, ſo verſteht man allemal das geometriſche Verhältniß darunter.

Zehenter Abſchnitt.

Von Proportionen.

§. 221. Die Aehnlichkeit oder Gleichheit zweier Verhältniſſe heißt eine Proportion.

§. 222. Eine Proportion hat vier Glieder; das erſte und vierte werden die äuſſern, das zweite und dritte aber die mittlern genannt.

§. 223. Wenn in einer Proportion das andere Glied des erſten Verhältniſſes und das erſte Glied des andern Verhältniſſes einerlei ſind, ſo heißt ſie eine ſtetige oder zuſammenhängende Proportion; ſind aber die beſtimmten Glieder unterſchieden, ſo iſt ſie eine abgeſonderte.

§. 224. Bei den Proportionen iſt die Redensart gewöhnlich: wie ſich verhält die erſte Zahl zu der zwoten, ſo verhält ſich die dritte zur vierten.

1) Arith-

1) Arithmetiſche Proportion.

§. 225. Die Aehnlichkeit oder Gleichheit zweier arithmetiſchen Verhältniſſe heißt eine arithmetiſche Proportion.

(Z. E. $3 - 1 = 5 - 3$)

§. 226. In jeder arithmetiſchen Proportion muß gleichviel herauskommen, wenn man das zweite Glied vom erſten, und das vierte vom dritten, oder das erſte vom zweiten und das dritte vom vierten abzieht.

(Z. E. $5 - 3 = 8 - 6$, und $3 - 5 = 6 - 8$) Die Differenz iſt jedesmal 2. Nach der erſtern Proportion ($5 - 3 = 8 - 6$) beſteht das erſte Glied aus der Differenz und dem zweiten Glied, dann $3 + 2 = 5$, und das dritte Glied beſteht aus der Differenz und dem vierten Glied, dann $6 + 2 = 8$. Oder nach der andern Proportion ($3 - 5 = 6 - 8$) beſteht das zweite Glied aus der Differenz und dem erſten Glied, das vierte Glied aber aus der Differenz und dem dritten Glied. Benannte Proportionen haben alſo, nach gegebener Erklärung, folgende Aehnlichkeit und Gleichheit mit einander:

$$\left\{\begin{array}{l} 5-3 = 8-6 \\ (3+2)-3 = (6+2)-6 \end{array}\right. \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} 3-5 = 6-8 \\ 3-(3+2) = 6-(6+2) \end{array}\right.$$

§. 227. Die Summe der beiden äuſſerſten Glieder iſt der Summe der beiden mittlern gleich. Z. B. $a+b+d = a+d+b$ oder $5+6 = 3+8$. §. 224.

(Da

(Da in dem erſten Exempel (§. 224.) das erſte Glied aus dem zweiten und der Differenz der Glieder in beiden Verhältniſſen, und das dritte Glied aus dem vierten und der Differenz beſteht, oder, da nach dem andern Exempel das zweite Glied aus dem erſten und der Differenz, das vierte Glied aber aus dem dritten und der Differenz beſteht, ſo kommt, wenn man im erſten Exempel das zweite und dritte Glied addirt, die Summe des zweiten und vierten Glieds und der Differenz heraus, dann $3 + 8 = 11$ und $3 + 6 + 2 = 11$ oder, wenn man im andern Exempel das erſte und vierte Glied addirt, ſo kommt die Summe des erſten und dritten Glieds und der Differenz heraus, folglich ſind die beiden Summen einander gleich, dann $3 + 8 = 11$ und $3 + 6 + 2 = 11$).

§. 228. Eine ſtetige oder zuſammenhängende arithmetiſche Proportion iſt, z. E. $2 - 3 = 3 - 4$; das Glied, das hier zweimal vorkommt, heißt das mittlere; alſo iſt in §. 216. $a + d = b$, folglich $b + d = b + 2\,d$, und jede ſtetige Proportion läßt ſich ſo ausdrücken: $a - (a + d) = a + d - (a + 2\,d)$.

§. 229. In einer ſtetigen arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äuſſern Glieder noch einmal ſo groß, als die Summe des mittlern Glieds, das zweimal vorkommt. (Z. E. $2 - 3 = 3 - 4$; $a + a + 2\,d = 2.\,(a + d)$.

§. 230. In einer ſtetigen arithmetiſchen Proportion kann man das mittlere Glied finden,

 wenn

wenn man die Summe der äuſſern Glieder halbirt oder dividirt.

(Man addire in der Proportion (§. 121.) 2+4 und dividire die Summe 6 mit 2, ſo iſt der Quotient 3 die mittlere Proportionalzahl).

§. 231. Wenn man zu drei gegebenen Zahlen die vierte arithmetiſche Proportionalzahl finden will, ſo addire man die zweite und dritte Zahl, und ziehe von der Summe die erſte ab, ſo bleibt die vierte übrig.

(Z. E. 4, 3, 6, ſeyen die gegebenen Zahlen; $6 + 3 = 9$ und $9 - 4 = 5$, oder die vierte Proportionalzahl. Die Proportion heiſt nun $4 - 3 = 6 - 5$.)

§. 232. Wenn man die bei den Proportionen gewöhnliche Redensart (§. 224.) auf die arithmetiſche Proportionen anwendet, ſo hat ſie folgenden Sinn: Um wie viel die erſte Zahl gröſſer oder kleiner iſt, als die zweite, um eben ſo viel iſt die dritte Zahl gröſſer oder kleiner, als die vierte.

2) Geometriſche Proportion.

§. 233. Die Aehnlichkeit oder Gleichheit zweier geometriſchen Verhältniſſe heiſt man eine geometriſche Proportion. (Z. E. $6 : 2 = 15 : 5$; $a : b = c : d$).

§. 234. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſo iſt auch $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; alſo auch $d : c = b : a$.

§. 235.

§. 235. Eine ſtetige, geometriſche Proportion iſt z. E. 2 : 6 = 6 : 18; und eine abgeſonderte, geometriſche Proportion iſt 2 : 6 = 5 : 15.

§. 236. Gleichnahmige oder ähnlich liegende Glieder ſind ſolche, welche in unterſchiedenen Verhältniſſen einerlei Stellen einnehmen, oder einerlei Namen führen.

(Z. E. in den ſtetigen Proportionen, 3, 6, 12 und 4, 8, 16, ſind 3 und 4 die erſten, 6 und 8 die mittlern, (welche die Stellen der andern und dritten vertreten), 12 und 16 aber die vierten Glieder, folglich heiſſen 3 und 4, 6 und 8, 12 und 16, oder die vordere, mittlere und hintere Glieder, ähnlich liegende Glieder.)

§. 237. Das Product des erſten Glieds in das vierte iſt gleich dem Product des zweiten Glieds in das dritte.

(Das Exempel ſey 2 : 6 = 5 : 15. In dieſem Exempel iſt das zweite Glied 6 nichts anders, als das erſte Glied 2 mit dem Exponenten 3 multiplicirt, und das vierte Glied 15 iſt nichts anders, als das dritte Glied 5 mit dem Exponenten 3 multiplicirt. Man kann daher die Proportion auch folgendermaſſen ſchreiben 2 : (3. 2) = 5 : (3. 5.) Wenn man alſo das erſte und vierte Glied multiplicirt, ſo ſind die Factores 2. 3. 5, und wenn man das zweite und dritte Glied multiplicirt, ſo ſind die Factores wieder 3. 2. 5, deßwegen muß in beiden Fällen einerlei herauskommen: oder A : B = C : D, ſo iſt $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, alſo $\frac{A.D}{B.C} = \frac{C.B}{D.B}$, und B.D = D.B, alſo A.D = C.B.

§. 238. Wenn drei Zahlen in Proportion ſtehen, ſo iſt das Product aus den äuſſerſten Gliedern der Quadratzahl des mittleren Gliedes gleich.

(In der Proportion 2, 6, 18 iſt 2. 18 = 36. und 36 = 6. 6. (S. §. 234.)

§. 239. Wenn vier Zahlen in einer Proportion ſtehen, ſo verhält ſich die erſte zu der dritten, wie die zweite zu der vierten.

(Wenn man zwei Zahlen durch einerlei Zahl multiplicirt, ſo ſind die Producte in dem nemlichen Verhältniß, als wie die Zahlen, welche man multiplicirt hat. Z. E. man hat 4 und 8. Beide Zahlen multiplicire man durch 6, ſo hat man 24 und 48 oder ſechs Vierer und ſechs Achter. Es iſt alſo klar, daß 4 Einheiten in 8 Einheiten eben ſo oft enthalten ſind, als 4 Sechſer in 8 Sechſern. Oben (§. 237.) war die Proportion gegeben 2: 6 = 5: 15 oder 2: (3. 2) = 5: (3. 5); dieſes, nach dem gegenwärtigen Satz verſetzt, gibt 2: 5 = (3. 2): (3. 5) und das Verhältniß 2 und 5 iſt eben ſo, wie zwiſchen 3. 2 und 3. 5, weil dieſe letztern Glieder nichts anders ſind, als die 2 erſtern 2 und 5 durch 3 multiplicirt. Eben ſo iſt es auch, wenn zwei Zahlen durch eine dritte dividirt werden, ſo verhalten ſich die Quotienten wie die dividirte Zahlen, denn man kann dieſe letztern anſehen, als wenn ſie durch die Multiplication des Diviſoris und des Quotienten wären hervorgebracht worden. Z. E. 4 und 8 dividirt durch 2, gibt die Proportion; 4: 2 = 8: 4.

$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$; alſo ma: mb = a: b.

§. 240. Wenn zwei Producte gleich ſind, ſo kann man aus ihnen eine Proportion machen, von welcher das eine Product, welches man will, die mittlern Glieder, das andere die äuſſern gibt.

B ſei gleich 3
D — — 9
E — — 2
C — — 6.

Aus B. C = D. E
3. 6 = 9. 2
folgt
B : D = E : C
3 : 9 = 2 : 6;

denn es iſt

$$\frac{B.\ C}{D.\ C} \qquad \frac{D.\ E}{D.\ C}$$

$$\frac{3.\ 6}{9.\ 6} = \frac{9.\ 2}{9.\ 6},$$

alſo

$$\frac{B}{D} \qquad \frac{E}{C}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{6},$$

folglich

B : D = E : C
3 : 9 2 : 6.

§. 241. Wenn $B : D = E : C$
$3 : 9 = 2 : 6$, ſo iſt

1) verwechſelt

$B : E = D : C$

$3 : 2 = 9 : 6$,

denn

$B.C = D.E$

$3.6 = 9.2$

alſo

$$\frac{B.C}{D.C} = \frac{D.E}{D.C}$$

$$\frac{3.6}{9.6} = \frac{9.2}{9.6},$$

oder

$$\frac{B}{C} = \frac{D}{E}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{9}{2}$$

2) der vorhergehenden und folgenden Glie- der Summen oder Unterſchiede genommen,

$B \pm E : D \pm C = B : D$

$3 \pm 2 : 9 \pm 6 = 3 : 9$

denn

$B.C = D.E$

$3.6 = 9.2$,

alſo

$B.C \pm E.C = D.E \pm E.C$

$3.6 \pm 2.6 = 9.2 \pm 2.6$

oder

oder

$(B \pm E) . C = (D \pm C) . E$

$(3 \pm 2) . 6 = (9 \pm 6) . 2$

alſo

$B \pm E : D \pm C = E : C = B : D$

$3 \pm 2 : 9 \pm 6 = 2 : 6 = 3 : 9$

3) umgekehrt,

$B : B - D = E : E - C$

$3 : 3 - 9 = 2 : 2 - 6$

denn

$B : E = D : C$

$3 : 2 = 9 : 6,$

alſo

$B : E = B - D : E - C$

$3 : 2 = 3 - 9 : 2 - 6$

4) zuſammengeſetzt und getheilt,

$B \pm D : D = E \pm C : C$

$3 \pm 9 : 9 = 2 \pm 6 : 6$

denn

$B : E = D : C$

$3 : 2 = 9 : 6,$

alſo

$B \pm D : E \pm C = D : C$

$3 \pm 9 : 2 \pm 6 = 9 : 6,$

alſo

$B \pm D : D = E \pm C : C.$

$3 \pm 9 : 9 = 2 \pm 6 : 6.$

§. 242. Die mittlere geometriſche Proportionalzahl kann man finden, wenn man zwei gegebene Zahlen mit einander multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel zieht.

Wenn $B = C,\ A = 4$
$6 = 6,\ D = 9,$
ſo iſt
$A.\,D = AD = B^2$
$4.\,9 = 36 = 6^2$
und
die Wurzel aus $A.D = B$
$4.\,9 = 6.$

§. 243. Zu zweien Zahlen kann man die dritte finden, wenn man die zweite durch ſich ſelbſt multiplicirt, und durch die erſte dividirt.

Z. B. $B,\ B,$
$4,\ 12,$
ſo ſagt man
$B.\,B = BB$
$12.\,12 = 144$

$$BB : A = \frac{BB}{A}$$
$$144 : 4 = 36$$

alſo heiſſen die drei Glieder
$A,\ B,\ \frac{BB}{A} = C.$
$4,\ 12,\ 36$

§. 244. Zu drei gegebenen Zahlen kann man die vierte finden, wenn man die zweite durch die dritte multiplicirt, und das Product durch die erſte dividirt.

A, B, C
4, 12, 5 ſeien gegeben,
ſo iſt $B.\ C = BC$
$15.\ 5 = 60$

$$\frac{BC}{A} = D$$

$$\frac{60}{4} = 15,$$

folglich iſt die Proportion:

$A : B = C : D$
$4 : 12. = 5 : 15$

denn

$D.\ A = B.\ C$
$15.\ 4 = 12.\ 5$

alſo

$$D = \frac{B.\ C}{A}$$

$$15 = \frac{12.\ 5}{4}$$

§. 245. Die gewöhnliche Redensart bei den Proportionen hat in der geometriſchen folgenden Sinn:

Wie vielmal die erſte Zahl in der zweiten enthalten iſt, oder die zweite in ſich enthält, eben

eben ſo vielmal enthält die dritte Zahl die vierte, oder iſt in ihr enthalten.

Eilfter Abſchnitt.

Von der Rechnung in genannten Zahlen.

§. 246. Genannnte Zahlen ſind ſolche, denen am Ende der Name ihrer Einheit beygefügt wird. Z. E. 5 Gulden, 6 Thlr, 3 Groſchen, 7 Kreuzer.

§. 247. Weil man nur Zahlen von einerlei Art oder Einheit zuſammenzählen kann, ſo kann man die vier Rechnungsarten nicht eher auf die genannte Zahlen anwenden, biß ſolche unter einerlei Benennung gebracht ſind.

(Man muß alſo den Werth des Geldes, Gewichts und Maaſes wiſſen, der in der Gegend, worinn man lebt, bekannt iſt. Z. B. 24 Groſchen machen 1 Rthlr; 60 Kreutzer 1 Gulden; 100 oder 110 Pfund 1 Centner; 32 Loth 1 Pfund; 4 Quintgen 1 Loth. Man muß wiſſen, wie viel Simri 1 Scheffel, wie viel Maas ein Eimer, wie viel Eimer ein Fuder machen.)

Die vier Rechnungsarten.

§. 248. Addition.

5 fl.	30 Kr.	5 Heller.
2 fl.	50 Kr.	3 —
—	40 Kr.	1 —
9 fl.	1 Kr.	3 Heller.

(Vor-

(Vorausgeſetzt, daß nicht in allen Orten gleichviel Heller auf einen Kreutzer gehen, ſagt man: 5 und 3 und 1 Heller geben 9 Heller; gehen z. E. 6 Heller auf 1 Kr., ſo ſetzt man nur 3 Heller unter den Strich, und behält die 6 als die Einheit der Kreutzer in die nächſtfolgende Stelle der Kreutzer, wo es heißt; 30 und 50 geben 80, und 40 dazu nebſt dem behaltenen Kr. geben 121 Kreutzer, oder (weil 60 Kr. 1 fl. machen,) zuſammen 2 fl. 1 Kr. Man ſetzt alſo 1 Kr. in die Stelle der Kr. und behält zween Gulden für die Stellen der Gulden, wo es abermal heißt: 5 und 2 geben 7 fl. und 2 behalten, geben 9 fl.)

§. 249. Subtraction.

fl.	Kr.	H.
3 fl.	2 Kr.	3 H.
2 fl.	20 Kr.	5 —
— fl.	41 Kr.	4 H.

(5 Heller von 3 Hellern laſſen ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der Kreutzer einen Kreutzer, d. i. 6 Heller; dieſe zu 3 addirt geben 9 Heller; von 9 Hellern laſſen ſich 5 abziehen, der Reſt iſt 4 Heller. Ferner: 20 Kr. von 1 Kr. (weil 1 Kr. für die Heller entlehnt wurde,) laſſen ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der Gulden 1, welche Einheit 60 Kreutzer macht; 20 Kr. von 61 laſſen 41 übrig. Endlich 2 fl. von 2 fl. (weil 1 fl. in die Stelle der Kr. entlehnt wurde,) laſſen nichts. Alſo iſt der Reſt 41 Kr. 3 Heller. Wem die Rechnung bei der Subtraction wegen des Entlehnens beſchwerlich iſt, der darf nur nach der Lehre von entgegengeſetzten Größen ſubtrahiren, in welchem Fall man nicht irren kann, wenn man auch ſchon nicht weiß, wie viel Heller einen Kreutzer, wie viel Kreutzer einen Gulden machen.

Z. B. 3 fl. + 2 Kr. + 3 Heller
2 fl. + 20 Kr. + 5 Heller

— — —
1 fl. — 18 Kr. — 2 Heller
d. i. + 41 Kr. + 4 Heller.

Die Querſtriche bedeuten Minus.

§. 250. Multiplication.

2 fl. 23 Kr.) multiplicirt mit 3.
3

6 fl. 69 Kr.

(Da 69 K. 1 fl. 9 Kr. machen, ſo iſt 6 fl. 69 Kr. ſo viel, als 7 fl. 9 Kr. Man kann aber in der Operation die 60 Kr. welche 1 fl. ausmachen, im Sinn behalten, und wenn man die Gulden multiplicirt hat, dieſen in Sinn behaltenen Gulden dazu addiren.)

§. 251. Diviſion.

Wenn man 3 fl. 20 Kr. unter 4 Perſonen theilen will, ſo müſſen zuerſt die Gulden zu Kreutzern gemacht, das Product zu den benannten Kreutzern addirt und die ganze Summe durch 4 dividirt werden; (Z. E. fl. 3. 60 = 180 Kr.
dazu addirt obige 20 Kr.

gibt 200 Kr.
dieſe Summe dividirt } = 50 Kr.
4

Sollte ſich in ähnlichen Rechnungen der Quotient über 60 belauffen, ſo muß man mit 60 dividiren; der Quotient wird die Gulden beſtimmen, und was übrig bleibt, ſind Kreutzer.)

§. 252. Wenn man einen Bruch ſchnell in genannten Zahlen ausdrücken will, ſo multiplicire man den Zähler des Bruchs in die Anzahl der Einheiten, die auf die gegebene Größe gehen, und dividire das Product durch den Nenner.

Z. E. bei $\frac{6}{7}$ fl. wird der Zähler mit 60 multiplicirt, und durch den Nenner dividirt, was im Quotienten herauskommt, ſind Kreuzer; und was übrig bleibt, ſind Brüche von Kreuzern, die auf eine ähnliche Art in Heller verwandelt werden können. Das Exempel ſieht folgendermaſſen aus:

$$\frac{6}{7}\text{ fl.} = \frac{6.60}{7} = \frac{360}{7} = 51\frac{3}{7}\text{ Kr.}$$

und

$$\frac{3}{7}\text{ Kr.} = \frac{3.6}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}\text{ Heller.}$$

Es iſt alſo der Bruch $\frac{6}{7}$ fl. = 51 Kr. $2\frac{4}{7}$ Heller.)

Zwölfter Abſchnitt.

Von der Regel de Tri.

§. 253. Die Regel de Tri lehrt, wie man zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometriſche Proportionalzahl finden ſoll (§. 244.).

(Diß geſchieht nun in genannten Zahlen folgendergeſtalt:

Z. E. 100 fl. Capital geben 5 Gulden Zinß, was geben 250 fl. Capital?

Oder: Cap. 100 fl: 5 fl. Zinß = 250 fl. Cap.: X.

Hier wird das zweite Glied 5 mit dem dritten Glied 250 multiplicirt, und das herauskommende Product 1250 durch das erſte Glied 100 dividirt, ſo iſt der Quotient $12\frac{1}{2}$ fl. die geſuchte vierte Pro-

Proportionalzahl, die oben mit dem Buchſtaben X inzwiſchen bezeichnet worden. Will man die vorſtehenden Glieder noch mehr der mathematiſchen Ordnung gemäß einrichten, ſo kann man auch ſagen:

100 fl. Cap. verhalten ſich zu 250 fl. Cap. wie ſich verhalten 5 fl. Intereſſe zu dem geſuchten Intereſſe oder der vierten Proportionalzahl.

100 fl. Cap.: 250 fl. Cap. = 5 fl. J: X

Da nun X = 12½ fl. ſo iſt die Proportion folgende:

100 fl. Cap.: 250 fl. Cap. = 5 fl. Int: 12½ fl. Int.)

§. 254. Wenn die Glieder nicht in gehörigen Ordnung auf einander folgen, ſondern erſt verſetzt werden müſſen, wenn man das Geſuchte richtig finden ſoll, ſo nennen es einige die verkehrte Regel de Tri.

(Die Glieder ſeyen 100 fl. Cap. und 250 fl. Cap. und 5 fl. Intereſſe.

Hier verfährt man, wie folgt:

Man ſetzt in die zwei erſten Glieder diejenige Zahlen, die gleiche Benennungen haben, nemlich Capital und Capital, in das dritte Glied aber die übrige gegebene Zahl, nemlich das Intereſſe. Wenn nun hier von einem Intereſſe zu 5 pr. Cent. die Rede iſt, ſo ſieht man leicht, daß die Zahl im vierten Glied größer ſeyn müſſe, als die Zahl im dritten Glied, und eben deswegen muß auch in das zweite Glied die größere Zahl geſetzt werden. In dieſem Fall ſieht das Exempel folgendergeſtalt aus:

100 fl. Cap.: 250 fl. Cap. = 5 fl. Int: 12½ fl. Int.

Wenn

Wenn aber die Zahl im vierten Glied kleiner ſeyn muß, als im dritten, ſo ſetzt man die grösse-re der gleichnamigten Zahlen in das erſte Glied, alsdenn heißt das Exempel:

250 fl. : 100 fl. = $12\frac{1}{2}$ fl. Int. : 5 fl. Int.)

§. 255. Die zuſammengeſetzte Regel de Tri iſt, wo die Regel de Tri mehr als einmal angebracht und zu fünf gegebenen Größen die ſechſte gefunden wird. Sie heißt auch Regula de Quinque, (die Regel von Fünfen).

(Wenn 60 fl. Cap. in 5 Jahren 15 fl. Intereſſe bringen, was bringen 30 fl. Cap. in 8 Jahren?

Hier ſucht man 1) durch die Regel de Tri, wie viel Intereſſe 30 fl. Cap. in 5 Jahren bringen. und 2) wie viel Intereſſe 30 fl. Cap. in 8 Jahren bringen. Die erſte Frage iſt alſo:

Wie viel Intereſſe bringen 30 fl. Capital in 5 Jahren?

Cap. 60 fl: Cap. 30 fl. = Int. 15 fl. : Inter. X.

30

(3
~~45~~(0 | $7\frac{1}{2}$ fl. Inter. = X.
~~6~~ 0 |

Die zweite Frage iſt?

Wie viel Intereſſe bringen 30 fl. Capital in 8 Jahren?

Jahr 5: Jahr 8 = $7\frac{1}{2}$ fl. Inter.: X.

$\frac{15}{2} \cdot 8 = \frac{120}{2} : \frac{5}{1} = \frac{120}{2} \cdot \frac{1}{5}$

= ~~12~~(0 | 12 fl. Int. = X.
~~11~~(0 |

§. 256.

§. 256. Weil es aber klar iſt, daß 5mal 60 fl. Capital in 1 Jahr eben ſo viel Intereſſe geben, als 60 fl. Capital in 5 Jahren, und 8mal 30 fl. Cap. in 1 Jahr eben ſo viel bringen, als 30 fl. Cap. in 8 Jahren, ſo kann man auch ſagen:

$(60 \times 5) : (30 \times 8) = 15 : X$

oder:

$300 : 240 = 15 : X$

240

600

30

$\not{3}\not{0} | 00 | 12$ fl. = X.
$\not{2}\not{5} | 00$

§. 257. Durch nachfolgendes Exempel kann ſowohl die zuſammengeſetzte, als verkehrte Regel de Tri erläutert werden.

(Vier Weber werden mit 100 Ellen Leinwand in 2 Monaten fertig, wie viel müſſen Weber arbeiten, um 900 Ellen Leinwand in 6 Monaten zu bekommen?

Man ſieht hier bald, daß, wie oben das Capital und die Zeit die Urſache von dem Intereſſe geweſen ſind, alſo auch hier die Menge der Weber und eine gewiſſe Zeit eine beſtimmte Zahl von Ellen hervorbringen. Man muß daher das gegebenene Exempel folgendergeſtalt ordnen:

I. Glied.

I. Glied. II. Glied.
zu 100 Ellen Leinw. (werden erfordert) (4 Web. × 2 Mon.)
III. Glied. IV. Glied.
zu 900 Ellen Leinw. (ſind alſo nöthig) (y Web. × 6 Mon.)

oder:

I. Gl. II. Gl. III. Gl. IV. Gl.
100: (4. 2.) = 900: (y × 6)

Hier iſt in dem vierten Glied nur der eine Factor 6 bekannt, der andere Factor aber, der inzwiſchen mit y bezeichnet iſt, und die Zahl der Weber andeutet, iſt eben das, was man finden ſoll. Wenn man nun durch die Regel de Tri das vierte Glied erhalten hat, und daſſelbe durch den einen Factorem 6 dividirt, ſo kommt der andere Factor y heraus.

$$\frac{\begin{array}{l}900\\8\end{array}}{}\quad \frac{7200}{100} = 72$$

Dieſe 72 dividirt man durch 6, ſo bekommt man den Quotienten 12, welche Zahl den Werth von y oder die Zahl der Weber andeutet. Man kann auch wie (§. 254.) bemerkt worden, dieſes Exempel ebenfalls der mathematiſchen Ordnung noch gemäßer alſo ſetzen:

100 : 900 = 8 : (y × 6)

welches aber in der Rechnung, wie der Augenſchein weiſet, völlig einerlei iſt.

§. 258. Zuweilen muß man die Regel de Tri öfters, als einmal anbringen, wie ſolches in der Geſellſchaftsrechnung geſchieht.

(Wenn z. E. Mehrere zuſammenlegen, und Gewinn oder Verluſt nach Proportion des Eingeleg-

 ten

ten mit einander theilen ſollen, ſo wendet man die Regel de Tri ſo oft an, als Perſonen bey der Einlage intereſſirt ſind, weil ſich das ganze zuſammengelegte Geld zum ganzen Gewinn oder Verluſt eben ſo verhält, wie ſich die Einlage eines jeden zu ſeinem Antheil an dem Gewinn oder Verluſt verhält.

Z. E. Einlage des	erſten	12 fl.	A
—	zweiten	6 fl.	B
—	dritten	4 fl.	C
		22 fl.	

Wenn man nun vorausſetzt, daß dieſe drei Perſonen 12 fl. mit einander gewonnen, ſo geſchieht die Rechnung, ein wenig abgeändert, folgendergeſtalt:

22 fl. ganze Einlage verhält ſich zu 12 fl. als dem ganzen Gewinn, wie ſich verhalten 12 fl. (6 fl.) (4 fl.) als die Einlage des erſten (zweiten) (dritten) zu ſeinem Antheil an dem Gewinn.

A. 22 fl. : 12 fl. = 12 fl. : X.

12
———
24
12
———
(1
2(2
144 4 | $6\frac{12}{22} = 6\frac{6}{11}$ fl. G. von A. = X.
22 2 |

B.

B. 22 fl.: 12 fl. = 6 fl.: X.
6

72(6
72 | $3\frac{6}{22} = 3\frac{3}{11}$ fl. G. von B. = X.
22 |

C. 22 fl.: 12 fl. = 4 fl.: X.
4

(4
48 | $2\frac{4}{22} = 2\frac{2}{11}$ fl. G. von C. = X.
22 |

= 12 fl. ganz. Gewinn.

§. 259. Die ſogenannte Vermiſchungsrechnung iſt mit der Geſellſchaftsrechnung einerlei, und lehrt, wie man aus dem gegebenen Verhältniß der einfachen Materien finden ſoll, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer verlangten Menge der vermiſchten Materien komme.

1ſtes Exempel.

Zu Verfertigung des Schießpulvers wird das Verhältniß ſolchergeſtalt gegeben, daß man zu 32 Loth Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel nehmen ſoll. Die Summe dieſer 3 Stücke beträgt 42 Loth. Da man nun nach der gegebenen Proportion 4 Pfund oder 128 Loth Schießpulver verfertigen ſoll, ſo ſagt man: Wie ſich verhält das erſte ganze Gewicht von 42 Loth zu dem andern ganzen und verlangten Gewicht von 128 Loth, ſo verhalten ſich 32 Loth Salpeter zu demjenigen Salpeter, den ich zu dem größern Gewicht brauche. Dieſe Anwendung man macht bei einem jeden einzelnen Beſtandtheile des Schießpulvers.

Iſtes Exempel.

A. 42 Loth : 128 L. = 32 L. Salpeter : X.

32
256
384

(2
33
41(2
4096 6 | $97\frac{22}{42} = 97\frac{11}{21}$ L. S. = X.
42 2
4

B. 42 L. : 128 L. = 6 L. Kohlen : X.

6

(1
2
34(2
768 8 | $18\frac{12}{42} = 18\frac{6}{21}$ L. K. = X.
42 2
4

C. 42 L. : 128 L. = 4 L. Schwefel : X.

4

1
16(8
81 2 | $12\frac{8}{42} = 12\frac{4}{21}$ L. S. = X.
42 2
4

= 128 L. oder 4 Pfund Schießpulver.

Die

Die Reduction aus Quintchen in Lothe, aus Lothen in Pfunde, und aus Pfunden in Centner iſt in dieſen und ähnlichen Rechnungen leicht vorzunehmen, wenn man weiß, daß 4 Quintchen 1 Loth, 32 Loth ein Pfund; 100 Pf. oder 110 Pfund 1 Centner machen.

IItes Exempel.

Der Königl. Preuß. erſte Generalchirurgus, Herr Schmucker, hat ein äuſſerliches Mittel erfunden, das er kalte Fomentation betitelt, und in Quetſchungen, Hirnerſchütterungen, leichten und ſchweren Hauptwunden u. ſ. w. nach vorausgeſetzten Aderläſſen, unter Verbindung innerlicher temperirender und ableitender Mittel, ſtatt der bisher gewöhnlichen warmen Umſchläge, mit dem gröſten Nutzen gebraucht. Die ganze Compoſition dieſes vortreflichen Heilmittels beſteht aus 40 Pfund Brunnenwaſſer, 4 Pfund Weineßig, 16 Unzen Salpeter und 8 Unzen Salmiac. Will man eine kleinere Quantität dieſer kalten Fomentation, (in die man Kompreſſen taucht, ſolche leicht ausdrückt und ſo oft, als ſie trocken werden, wiederholt,) z. E. nur 4 Pfunde haben, ſo verwandle man zuvor die mediciniſche Pfunde in Unzen, und addire ſie alsdenn zu den übrigen gegebenen Gröſſen. Da nun 12 Unzen ein mediciniſches Pfund ausmachen, ſo machen 40 Pfund 480 Unzen und 4 Pfunde 48 Unzen. Die Rechnung iſt folgende:

480 Unzen Waſſer,
48 U. — Weineßig,
16 U. — Salpeter,
8 U. — Salmiac,

geben die Summe von 552 Unzen. Dieſe Summe iſt das ganze Gewicht und verhält ſich zu den 4 Pfunden oder 48 Unzen, als dem verlangten Gewicht,

wicht, wie ſich eine jede der vier gegebenen Ingredientien zu derjenigen Proportion verhält, die man von einem jeden einzelnen Stück nehmen muß, um das verlangte Gewicht zu erhalten.

A. 552 : 48 = 480 : X.

```
    480
  -----
   3840
   192
 ------
     (0
    (41
   196(8
  2304 0 | 41 408/552 = 41 17/23 U. Waſſer = X.
   552 2
    55
```

$41 \frac{408}{552} = 41 \frac{17}{23}$ U. Waſſer = X.

B. 552 : 48 = 48 : X.

```
     48
  -----
    384
   192
  -----
   1(96
   23 04 | 4 96/552 = 4 4/23 U. Weineßig = X.
   5 52
```

$4 \frac{96}{552} = 4 \frac{4}{23}$ U. Weineßig = X.

C. 552 : 48 = 16 : X.

```
     16
  -----
    288
    48
  -----
   (216
    768  | 1 216/552 = 1 9/23 U. Salpeter = X.
    552
```

$1 \frac{216}{552} = 1 \frac{9}{23}$ U. Salpeter = X.

D. 552 : 48 = 8 : X.
8

384	$\frac{384}{552} = \frac{16}{23}$ U. Salmiac = X.
552	= 48 Unzen g. Gewicht.

Bei der Verwandlung der Unzen in kleinere Gewichte muß man wiſſen, daß 1 Unze, 2 Loth, 1 Loth 4 Quintchen, 1 Quintchen 3 Scrupel, und 1 Scrupel 20 Gran ausmachen.

IIItes Exempel.

Die Arquebuſade, oder das Schußwaſſer, welches der Kön. Pr. dritte Generalchirurgus, Herr Theden, als Erfinder, bei Verblutungen, friſchen Wunden, Quetſchungen, Verbrennen, Gliedſchwämmen u. ſ. w. mit großem Vortheil gebraucht, beſteht aus 3 Pfunden Weineßig, 3 Pf. rectificirtem Weingeiſt, 1 Pfund weiſſem Zucker, und 10 Unzen Vitriolgeiſt. Will man von dieſem bewährten Mittel, (das man kalt oder warm mit Kompreſſen, die man, wenn ſie trocken werden, wieder befeuchtet, umſchlägt) z. E. nur 20 Unzen haben, ſo verfährt man, wie beym IIten Exempel gemeldet worden. Da 3 Pfund ſo viel, als 36 Unzen ſind, ſo geben

36 Unzen Weineßig,
36 U. — Weingeiſt,
12 U — Zucker,
10 U. — Vitriolgeiſt,

die Summe von 94 Unzen.

Setzt man dieſes ganze Gewicht mit dem verlangten Gewicht von 20 Unzen, und jedes Ingrediens mit jeder einzelnen geſuchten Größe in eine Proportion, ſo gibt es folgende Rechnung:

A. $94 : 20 = 36 : X.$

36

720

(6
8(2
72 0 | $7\frac{62}{94} = 7\frac{31}{47}$ U. Eßig = X.
9 4

B. $94 : 20 = 36 : X.$

36

120
60

(6
8(2
72 0 | $7\frac{62}{94} = 7\frac{31}{47}$ U. Weingeiſt = X.
9 4

C. $94 : 20 = 12 : X.$

12

(5
8(2
24 0 | $2\frac{52}{94} = 2\frac{26}{47}$ U. Zucker = X.
9 4

D. $94 : 20 = 10 : X.$

10

(1
2(2
20 0 | $2\frac{12}{94} = 2\frac{6}{47}$ U. Vitriolg. = X.
9 4

= 20 U. ganzes Gewicht.)

§. 260.

§. 260. Die welſche Prartica lehrt, wie man bei der Regel de Tri einige Vortheile anbringen ſoll. Einer der vorzüglichſten beſteht darinn, daß man das erſte und zweite Glied, wenn es angeht, durch einerlei Zahl dividirt, und ſodann die herauskommenden Quotienten ſtatt der dividirten Zahlen in der Rechnung gebraucht, wodurch dann nothwendiger Weiſe eine große Erleichterung entſteht, weil dieſe Quotienten allezeit kleinere Zahlen ſind. Daß dadurch in dem Verhältniß ſelbſt keine Verminderung entſtehe, iſt dadurch klar, weil allzeit zwo Zahlen, wenn ſie durch eine andere entweder dividirt oder multiplicirt werden, immer in dem nemlichen Verhältniß bleiben.

Iſtes Exempel.

500 fl. Cap.: geben 60 fl. Intereſſe, was geben 75 fl. Cap.? oder

500 fl. Cap.: 75 fl. Cap. = 60 fl. Int.: X.

Hier kann man das erſte und zweite Glied durch 25 genau theilen, und bekommt alſo

20 fl. Cap.: 3 fl. Cap. = 60 fl. Int.: X.

Ferner kann man das erſte und dritte Glied durch 10 theilen, und bekommt alſo

2 fl. Cap.: 3 fl. Cap. = 6 fl. Int.: X.
6

~~18~~ | 9 fl. = X. = dem geſuchten
~~2~~ | vierten Glied, oder Intereſſe.

IItes Exempel.

500 fl. Cap.: geben in 10 Jahren 200 fl. Zinß, wie groß muß das Capital ſeyn, wenn man in 5 Jahren 1000 fl. Zinß bekommen will?

Nach der (§. 257.) gegebenen Anleitung wird das Exempel folgendergeſtalt geſetzt:

I. Glied.	II. Glied.
200 fl. Zinß:	(500 fl. Cap. ⋊ 10 Jahr.
III. Glied.	IV. Glied.
1000 fl. Zinß:	(y Cap. ⋊ 5 Jahr.

oder

200 fl. Z.: 1000 fl. Z. = (500 fl. Cap. ⋊ 10 J.) : (y Cap. ⋊ 5 Jahr)

d. i.

$$200 : 1000 = 5000 : (y \times 5)$$

Hier dividirt man das erſte und zweite Glied durch 200, und bekommt demnach

$$1 : 5 = 5000 : (y \times 5)$$

Nimmt man nun die gewöhnliche Rechnung vor, ſo iſt das ganze vierte Glied 5 · 5000, oder 25000, weil Eins nicht dividirt. Da nun im 4ten Glied, ein unbekannter und ein bekannter Factor zu finden, ſo dividirt man 25000 durch den bekannten Factor 5, und bekommt dadurch den Quotienten 5000, welcher der Werth von dem unbekannten Factor y, oder das geſuchte Capital iſt.)

§. 261. Nachdem, was vorausgeſetzt worden, wird man nunmehr im Stande ſeyn, die ſogenannte Reeſiſche Regel zu gebrauchen.

(Sie

(Sie beſteht in folgendem:

Man zieht 1) auf dem Papier eine gerade Linie gegen ſich herunter, damit man zwo Columnen oder Abtheilungen bekomme. 2) In die eine Columne wird die Urſache von einer gewiſſen Würkung, in die gegenüberſtehende Columne aber die Würkung ſelbſt geſetzt. Wenn z. E. ein gewiſſes Capital und eine gewiſſe Zeit, um ein beſtimmtes Intereſſe zu erhalten, erfordert wird, ſo kommt das Capital und die Zeit, welche die gemeinſchaftliche Urſache ausmachen, in die eine Columne, und hingegen das Intereſſe, als die Würkung dieſes Capitals und der Zeit, in die andere Columne. 3) Die Glieder werden auf folgende Weiſe abgewechſelt; a) zuerſt wird ein Glied, welches eine gewiſſe Benennung hat, und das man als eine Urſache anſehen kann, auf die rechte Seite und ſeine Würkung auf die linke Seite geſetzt, b) wenn dieſes geſchehen, ſo ſetzt man ein anderes Glied, das ebenfalls als eine Urſache betrachtet wird, und das mit der vorigen Urſache einerlei Benennung führt, auf die linke, und hingegen ſeine Würkung auf die rechte Seite. c) Wenn auch noch ſo viele Sätze vorkommen, ſo müſſen in der einen Columne eben die Benennungen anzutreffen ſeyn, welche man in der andern Columne findet. 4) Die unbekannte Zahl, welche man ſucht, wird durch einen Buchſtaben, Stern, oder anderes Zeichen bemerkt. 5) Wenn man alle Zahlen der einen Columne, in welcher ſich die unbekannte Zahl nicht befindet, mit einander multiplicirt, und hernach das daraus entſtehende Product mit dem Product aller Zahlen, welche die andere Columne enthält, wo die unbekannte Zahl iſt, dividirt, ſo iſt der Quotient dieſe erſt beſagte unbekannte Zahl. 6) Um dieſe Rechnung zu erleichtern, dividirt man vorher

her noch die Zahlen beider Columnen, ſo oft ſie ſich nemlich durch einerlei Zahl auf beiden Seiten dividiren laſſen, und rechnet alsdann nur mit den Quotienten. Nachſtehende Exempel werden das Vorſtehende mehr erläutern.

Iſtes Exempel.

600 fl. Cap. geben in 6 Jahren 50 fl. Intereſſe, was geben 1600 fl. Cap. in 4 Jahren? Hier ſetzt man die 600 fl. Cap. und die 6 Jahre Zeit, als die Urſache, in die Columne linker Hand, und hingegen die 50 fl. Zinß, als die Würkung, in die Columne rechter Hand. Weil nun nach der oben gegebenen Regel die Sätze ſo abwechſeln müſſen, daß die Benennungen, welche auf der einen Seite ſind, auch auf der andern ſeyn müſſen, ſo kommen jetzt die 1600 fl. Capital und die 4 Jahre Zeit, als die Urſache, in die Columne rechter Hand, und hingegen die Würkung davon, oder das zu findende Intereſſe, mit dem Buchſtaben X in die Columne linker Hand.

(600 fl. Cap.	50 fl. Intereſſe.
(6 Jahr.	1600 fl. Cap.)
X Inter.	4 Jahr.)

Da man nun in beiden Columnen mit einerlei Zahl dividiren darf, wenn es angeht, ſo dividirt man in gegenwärtigem Exempel

1) auf beiden Seiten mit 100, und bekommt

(6 fl. Cap.	50 fl. Intereſſe.
(6 Jahr.	16 fl. Cap.)
X Inter.	4 Jahr.)

2) auf beiden Seiten mit 2, ſo erhält man

(3 fl. Cap.	25 fl. Inter.
(6 Jahr.	16 fl. Cap.)
X Inter.	4 Jahr.)

3) auf beiden Seiten abermal mit 2, ſo erhält man

(3 fl. Cap.	25 fl. Intereſſe.
(3 Jahr.	8 fl. Cap.)
X Inter.	4 Jahr.)

Weil jetzt auf beiden Seiten mit einerlei Zahl nicht mehr dividirt werden kann, ſo müſſen alle Zahlen, die in der Columne, worinnen die unbekannte Zahl nicht ſteht, mit einander multiplicirt werden, nemlich hier in dem letzt gegebenen Exempel 25. 8. 4 = 800. Eben ſo werden auch die Zahlen in der andern Columne mit einander multiplicirt, nemlich 3. 3 = 9. Mit dieſem letzten Product wird, wie ſchon gemeldet, das erſtere Product dividirt, und der Quotient zeigt an, was der Werth von X ſey.

8(8
800 | 88 $\frac{8}{9}$ fl. Intereſſe = X.
99

IItes Exempel.

200 Soldaten machen in 24 Tagen eine Schanze, wie viel Soldaten braucht man, wenn die Schanze in 6 Tagen fertig werden ſoll?

(200 Sold.	1 Schanz.
(24 Täge.	6 Täge.)
1 Schz.	* Sold.)

Nach geſchehener Diviſion mit 6 bekommt man

(200 Sold.	1 Schanz.
(4 Täge.	1 Tag.)
1 Schz.	* Sold.)

Das Product auf der einen Seite iſt alſo hier 800, und da auf der andern Seite, worinnen die unbe-

unbekannte Zahl ſteht, nichts als Einer vorkommen, und mit dieſen nicht dividirt werden kann, ſo bleiben die 800 der Werth von *, oder der geſuchten Menge Soldaten.

§. 263. Wenn Brüche vorkommen, ſo werden die Nenner ausgeſtrichen, und wechſelsweiß in die entgegengeſetzte Columne als ganze Zahlen gebracht, und ſodann die Rechnung auf die vorige Weiſe gemacht.

Z. E. 50 Menſchen trinken in 3 Wochen $5\frac{1}{2}$ Eimer Bier, was trinken 30 Menſchen in 2 Wochen?

(50 Menſchen.	$5\frac{1}{2}$ Eimer Bier.
(3 Wochen.	30 Menſchen.)
y Bier.	2 Wochen.)

Weil hier eine ganze Zahl bei einem Bruch ſteht, ſo wird alles in einen Bruch verwandelt, und ſteht alſo das Exempel, wie folgt:

(50 Menſchen.	$\frac{11}{2}$ Eimer Bier.
(3 Wochen.	30 Menſchen.)
y Bier.	2 Wochen.)

Wenn nun der Nenner herüber in die entgege-ſtehende Columne getragen wird, ſo hat man

50	11
3	30
2	2
y	

Wird nun auf beiden Seiten mit 10, ſodann mit 3, endlich mit 2 dividirt, ſo iſt auf der rech-

ten

ten Seite nur noch 11, und auf der linken Seite 5 anzutreffen, und das Exempel ganz kurz

5 M.	11 B.
y B.	

Man dividire alſo 11 durch 5, ſo iſt der Werth von $y = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$ Eimer Bier.

§. 264. Bei der ſogenannten Kettenregel verfährt man faſt eben ſo, indem man die Größen, welche einander gleich ſind, in die beiden Columnen gegeneinander über ſetzt, und immer in der einen Columne mit der Benennung wieder anfangt, mit welcher man in der andern aufgehört hat.

(Möchte man z. E. wiſſen, wie viel ein franzöſiſcher Livre an Kreuzern betrage, ſo ſieht, nach Vorausſetzung, daß 6 Livres 1 franz. Laubthaler, 1 Laubthaler ſo viel als $2\frac{3}{4}$ Gulden, und 1 Gulden 60 Kreutzer machen, das Exempel alſo aus.

X Kr.	1 Livre.
6 Liv.	1 Laubth.
1 Lth.	$2\frac{3}{4}$ Gulden.
1 Guld.	60 Kreutzer.

Wenn man nun mit dem Bruch vorgeſchriebener maſſen verfährt, ſo hat man

X Kr.	1 Livre.
6 Liv.	1 Laubth.
1 Lth.	$\frac{11}{4}$ Gulden.
1 Guld.	60 Kreutzer.

Wird

Wird der Nenner herüber getragen, ſo hat man

X	1
6	1
1	11
1	60
4	

Nun dividire man

1) auf beiden Seiten mit 6, ſo hat man

X	1
1	1
1	11
4	10

2) auf beiden Seiten mit 2, ſo erhält man

X	1
1	1
1	11
2	5

Wenn man nun das Product der rechten Columne, welches 55 iſt, durch das Product 2 der linken Columne, (wo ſich nemlich die unbekannte Zahl X befindet) dividirt, ſo bekommt man 27½ Kreutzer, welche der Werth von X ſind.)

Dreizehenter Abſchnitt.

Von den Progreſſionen.

§. 265. Eine Reihe Zahlen, die in einer gewiſſen Vergleichung zu- oder abnehmen, nennt man eine Progreſſion. Es gibt eine arithmetiſche und geometriſche.

§. 266. Die Reihe der natürlichen Zahlzeichen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. ſ. w. iſt eine arithmetiſche Progreſſion, deren Differenz immer einerlei, nemlich 1 iſt.

§. 267. Die Summen der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Glieder in einer arithmetiſchen Progreſſion ſind allemal einander gleich. Iſt die Reihe

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d},\ \overset{6}{a+5d},\ \overset{7}{a+6d},$$

ſo iſt die Summe des erſten und ſiebenten, des zweiten und ſechsten, des dritten und fünften und des vierten Zweifaches einerlei Summe, z. B.

$$a + a + 6d = 2a + 6d;\quad 1 + 7 = 8;$$
$$a + d + a + 5d = 2a + 6d;\quad 2 + 6 = 8;$$
$$a + 2d + a + 4d = 2a + 6d;\quad 3 + 5 = 8;$$
$$a + 3d + a + 3d = 2a + 6d;\quad 4 + 4 = 8.$$

§. 268. Aus §. 267. erhellt, daß, wenn die Zahl der Glieder ungerad iſt, das mittelſte vom erſten und letzten gleichweit entfernt ſei, folglich ſein Zweifaches der Summe der beiden äuſſerſten gleich ſeyn werde.

§. 269. Man kann die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion finden, wenn man die Summe des erſten und letzten Glieds mit der halben Anzal der Glieder multiplicirt, denn, weil

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d \\ & & & a+2d, & a+d, & a \\ \hline & & & 2a+5d, & 2a+5d, & 2a+5d \end{array}$$

durch die Addition der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Glieder halb ſo viel gleiche Paare gibt, als Glieder vorhanden ſind, ſo darf man dieſe gleiche Paare nur zuſammen addiren. Dann

$$\begin{array}{r} 2a+5d \\ 2a+5d \\ 2a+5d \\ \hline \text{gibt } 6a+15d \end{array}$$

Diß aber bekommt man, wenn man die Summe des erſten und letzten Glieds durch die halbe Anzahl der Glieder multiplicirt, denn $6a+5d=(2a+5d).3$.

§. 270. Das letzte Glied iſt allemal die Summe des erſten, und der Differenz gleich, welche in die Anzal der Glieder, die um eins vermindert worden, multiplicirt iſt; denn wenn n die Anzahl der Glieder iſt, ſo iſt

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & n \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+(n-1)d. \end{array}$$

Die Differenz des dritten Glieds iſt

$$2d=(3=1)d,$$

die des vierten

$$3d=(4-1)d,$$

die

die des fünften

$$4\,d = (5 - 1)\,d,$$

alſo jedesmal um eins weniger, folglich die vom letzten oder nten Glied $(n - 1)\,d$, und das letzte Glied ſelbſt

$$a + (n - 1)\,d.$$

§. 271. Wenn die Glieder ſteigen, ſo iſt d poſitiv; fallen ſie, ſo iſt d negativ.

§. 272. Man hat alſo die Differenz, das erſte und letzte Glied, die Anzahl und die Summe der Glieder. Sind nun von dieſen fünf Dingen drei gegeben, ſo kann man allemal die zwei übrigen finden.

Wenn a das erſte Glied,
u das letzte Glied,
d die Differenz,
n die Anzahl der Glieder,
S die Summe bedeutet, ſo iſt

1) $S = (a + u)\,\frac{1}{2}\,n$,

2) $u = a + (n - 1)\,d$,

3) $n = \frac{2\,S}{a + u}$;

4) $d = \frac{u - a}{n - a}$.

5) $a = u - (n - 1)\,d$.

§. 273. Eine geometriſche Reihe oder Progreſſion iſt eine Menge von Zahlen oder Gröſſen

überhaupt, die in einer zuſammenhängenden geometriſchen Proportion fortgehen. Diejenige Größe oder Zahl, welche anzeigt, wie vielmal das unmittelbar vorhergehende Glied im nachfolgenden enthalten ſei, heißt der **Exponent** oder auch der **Name des Verhältnißes**.

§. 274. Der allgemeine Ausdruck einer geometriſchen Progreſſion, wenn man das erſte Glied = a, den Exponenten = m und die Zahl der Glieder = n ſetzt, wird, wenn man von dem letzten Glied anfängt und rückwärts ſchreibt, folgender ſeyn:

$$m^{n-1}a,\quad m^{n-2}a,\quad m^{n-3}a,\quad m^{n-4}a,\quad m^{n-5}a$$

und ſo weiter

denn man zähle die Glieder und ſchreibe vorwärts

$$\overset{1}{a},\quad \overset{2}{ma},\quad \overset{3}{m^2a},\quad \overset{4}{m^3a},\quad \overset{5}{m^4a},\quad \overset{6}{m^5a}\ \text{u. ſ. w.}$$

ſo iſt der Exponent [1] des gegebenen Glieds allemal um eins weniger, als die Zahl des Glieds. Geht z. B. die Progreſſion mit dem ſechsten Glied aus, ſo iſt dieſes Glied, das hier m^5a heißt, = $m^{6-1}a$, und wenn die Anzahl der Glieder $6 = n$ geſetzt wird, ſo iſt $m^5a = m^{6-1}a = m^{n-1}a$; das uneinsletzte Glied heißt alſo $m^{n-2}a$ u. ſ. w.

§. 275. Wenn die Progreſſion abnimmt oder fällt, ſo iſt m ein eigentlicher Bruch, folglich Zähler und Nenner poſitiv; wenn ſie aber ſteigt, ſo iſt m ein uneigentlicher Bruch, folglich Zähler und

Nen-

Nenner negativ; der Quotient aber dennoch poſitiv.

§. 476. Aus dem erſten und zweiten Glied, oder aus dem erſten Glied und dem Exponenten kann man alle folgende Glieder durch die Regel de Tri finden.

§. 277. Wenn die Summe = S, das erſte Glied = a, das letzte = u, der Exponent = m, und die Zahl der Glieder = n geſetzt werden, ſo kann man nach dieſen fünf Benennungen fünf Aufgaben auflöſen, da man aus drei gegebenen Stücken von dieſen fünf allemal die zwei übrigen findet; einige davon werden logarithmiſch aufgelöſt.

§. 278. Wenn das zweite Glied = b, ſo iſt der Exponent $= \frac{b}{a}$; dann im allgemeinen Ausdruck iſt das zweite Glied ma, folglich hier

$$\frac{ma = b}{ma = \frac{b}{a}} : a$$

Man kann alſo den Exponenten finden und wegſchaffen.

§. 279. Wenn das erſte Glied nicht Eins, ſo darf man nur alle Glieder durch das erſte Glied dividiren; man wird alsdann eine Reihe bekommen, die einerlei Verhältniß mit der vorigen hat, zum Beiſpiel

a, ma, m^2a, m^3a oder 6, 12, 24, 48, 96.
$1, m, m^2, m^3$ 1, 2, 4, 8, 16.

§. 280. Wenn das erſte Glied 1, das zweite m, ſo enthält die Reihe lauter Potenzen von m oder vom zweiten Glied.

§. 281. In einer geometriſchen Reihe ſind die Producte der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleich weit abſtehenden Glieder gleich. Z. B.

bei 1, 2, 4, 8, 16, 32 iſt

$1 . 32 = 2 . 16 . = 4 . 8.$

§. 282. Wenn man die Summe einer geometriſchen Progreſſion von Brüchen, deren Zähler 1 iſt, S nennt, und den Nenner des erſten Bruchs a, ſo iſt $S = \frac{1}{a-1}$, wenn die Zeichen nicht abwechſeln; hingegen $S = \frac{1}{a+1}$, wenn die Zeichen abwechſeln. Hievon laſſen ſich zween Beweiſe geben.

Erſter Fall.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} = S$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \;.\; a$$

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = a\,S$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = S \text{ ſubtrahirt}$$

ſo bleibt $1 = a\,S$, d. i.

$$1 = (a-1)\,S$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : a-1$$

$$\frac{1}{a-1} = S.$$

Zwei-

Zweiter Fall.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} = S \qquad .\,a$$

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} = a\,S$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = S \text{ addirt}$$

$$1 = a\,S + S \text{ oder}$$

$$1 = (a+1)\,S \qquad : a+1$$

$$\frac{1}{a-1} = S.$$

§. 283. Wenn man das vorhergehende Glied von dem nächſtfolgenden immer abzieht, ſo wird die Progreſſion der Differenzen wieder eine geometriſche Progreſſion ſeyn, die den vorigen Exponenten hat. Die Progreſſion ſei

$$a,\ ma,\ m^2a,\ m^3a,\ m^4a \ldots m^{n-1}a,$$

ſo iſt der Unterſchied

$$ma-a,\ m^2a-ma,\ m^3a-m^2a,\ m^4a-m^3a,$$

oder:

$$(m-1)a,\ m(m-1)a,\ m^2(m-1)a,\ m^3(m-1)a$$

oder

1, 2, 4, 8, 16, 32 ſei die Progreſſion, ſo iſt

2—1, 4—2, 8—4, 16—8, 32—16

ihr Unterſchied, denn

$$\begin{aligned} 2 - 1 &= 1, \\ 4 - 2 &= 2, \\ 8 - 4 &= 4, \\ 16 - 8 &= 8, \\ 32 - 16 &= 16, \end{aligned}$$

alſo wieder eine geometriſche Progreſſion von einerlei Exponenten. Eben ſo kann man die zwote, dritte, vierte Reihe der Unterſchiede finden, und allemal wird eine ähnliche geometriſche Proportion herauskommen.

Vierzehenter Abſchnitt.

Von den Logarithmen.

§. 284. Der Name Logarithme iſt griechiſchen Urſprungs (λογων αρι-θμος) und bedeutet die Zahl der Verhältniſſe. Die erſten Erfinder waren Nepper, ein Schotländer und Brigge, ein Engländer. Man kann die Logarithmen zur Verwandlung der Multiplication in Addition, und die Diviſion in Subtraction gebrauchen. Beſonders fühlt man ihren Nutzen in der Trigonometrie.

§. 285. Wenn man unter eine geometriſche Progreſſion, die mit 1 anfängt, eine arithmetiſche ſchreibt, deren erſtes Glied = 0 iſt, ſo enthält die zwote Reihe die Logarithme der erſten Reihe.

§. 286. Die logarithmiſche Reihe muß nothwendig mit einer Nulle anfangen, wenn das erſte

Glied

Glied der geometriſchen Progreſſion 1 iſt, denn die Progreſſion ſei 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, ſo iſt der Exponent von $1 = 0$, weil $1 = a^0$; der Exponent von $a = 1$; der von $a^2 = 2$, der von $a^3 = 3$ u. ſ. w. Dieſe Exponenten nun ſind die Zahlen der Verhältniſſe, oder die Logarithmen, welche anzeigen, wie vielmal das erſte Glied nach 1 in den folgenden enthalten ſei.

§. 287. Weil alle geometriſche Progreſſionen, das erſte Glied ſei, was es wolle, durch die Diviſion des erſten Glieds, auf eine ſolche gebracht werden können, deren erſtes Glied, wird, und zwar ſo, daß die Verhältniß unverändert bleibt, ſo kann man die Logarithmen für alle möglichen Progreſſionen in ganzen Zahlen gebrauchen. Zum Beweiß. Dividirt man bei der Progreſſion

7, 14, 28, 56, 112

durch 7, ſo iſt 1, 2, 4, 8, 16, eine neue Progreſſion, deren erſtes Glied Eins wird.

§. 288. a) Der Logarithme des Products iſt die Summe der Logarithmen, der Factorum; und der Logarithme des Quotienten iſt die Differenz der Logarithmen vom Dividendus und Diviſor.

a) Z. B. $x^m \cdot x^r = xm = x^r$. Nun iſt m der Logarithme von x^m, und r der Logarithme von x^r, alſo iſt die Summe $m + r$ der Exponent, d. i. der Logarithme des Products.

b) $x^{m+r} : x^r = x^{m+r-r} = x^m$. Nun iſt m + r der Logarithme des Dividendus, r der Logarithme des Diviſors, und m der Logarithme des Quotienten, m aber iſt die Differenz der beiden Logarithme m + r, und r; folglich werden in der Diviſion die Logarithme des Diviſors vom Logarithmen des Dividendus abgezogen, und was übrig bleibt, iſt der Logarithmus des Quotienten.

§. 289. Weil eine gebrochene Zahl durch einen negativen Exponenten ausgedrückt wird, ſo kann man auch für die rückwärts fortgeſetzte Reihe in Brüchen Logarithmen finden

z. B. $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a}$, 1, a, a2, a^3, a^4,

ſei die Reihe, ſo ſind die Logarithmen

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,$

weil $\frac{1}{a^4} = a^{-4}$,

$\frac{1}{a^3} = a^{-3}$,

$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$. u. ſ. w.

§. 290. Bei der Erhebung einer Zahl zu einer Potenz, welches durch die Multiplication des Exponenten in den gegebenen Grad der Potenz geſchieht, darf man nur den Logarithmen der Potenz in den gegebenen Grad multipliciren. Bei der Ausziehung der Wurzel, welches geſchieht,

wenn

wenn man den Exponenten durch den gegebenen Grad der Wurzel dividirt, darf man nur durch den Logarithmen dividiren, denn die Logarithmen drücken die Exponenten aus. Iſt die geometriſche Progreſſion

1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	ſo iſt die arithmetiſche oder Logarithmiſche
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	

Will man nun das Produkt von 4 und 16 haben, ſo addirt man die Logarithmen 2 + 4, die Summe 6 correſpondirt mit dem Product 64.

Verlangt man den Quotienten aus 8 in 128, das heißt, wird 128 durch 8 dividirt, und man ſieht, daß 7 der Logarithme von 128, und daß 3 der Logarithme von 8 iſt, ſo ziehe man 3 von 7 ab, und der Logarithme des Quotienten wird 4 ſeyn, welcher mit 16 correſpondirt.

Will man die dritte Potenz von 4, deſſen Logarithme 2 iſt, ſo multiplicire man dieſe 2 mit 3, ſo hat man 6, welchem die Potenz 64 correſpondirt.

Verlangt man die ſiebente Potenz von 2, deſſen Logarithme 1 iſt, ſo multiplicire man dieſe 1 mit 7, welchem die Potenz 128, als die ſiebente Potenz von 2 correſpondirt.

Verlangt man die Cubicwurzel aus 64, deſſen Logarithme 6 iſt, ſo dividire man dieſe 6 durch die Zahl der Wurzel, welche 4 iſt, der Logarithme von 4 iſt 2, und die Wurzel 4 correſpondirt mit ihm. Alſo $4 = \sqrt[3]{64}$.

§. 291.

§. 291. Man kann die Logarithmen derjenigen Zahlen, die zwiſchen die Potenzen hineinfallen, durch Näherung ſo finden, daß der Fehler nicht merklich iſt.

Die nächſten Potenzen ſeien

$$x^m \qquad x^{m+1}.$$

Die mittlere Proportionalzahl heiſſe p, ſo iſt

$$p = \sqrt{x^{m+1} x^m} = \sqrt{x^{m+1}};$$

der Exponent iſt alſo

$$\frac{2m+1}{2} = m + \tfrac{1}{2},$$

und eben dieſer Exponent iſt auch der Logarithme.

§. 292. Man hat in den logarithmiſchen Tabellen die geometriſche Reihe nach der Decadiſchen Progreſſion angenommen, z. B.

1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,

weil ſie die bequemſte iſt, doch hätte man jede andere auch annehmen können. Die Logarithmen der dazwiſchen fallenden Glieder hat man in Decimalbrüchen berechnet, aber ſo, daß von 1 bis 100000 ſich nur ſechs Zahlen befinden, die mathematiſch genaue Logarithmen haben.

§. 293. Weil die Logarithmen in zehentheiligen Brüchen gefunden werden, ſo beſteht ein jeder aus einer ganzen Zahl, oder ſtatt des Zahlzeichens, aus einer Null, und aus Brüchen. Das ganze Zahlzeichen heißt die Charakteriſtik. Die

Zah-

Zahlen von 1 bis 10 haben die Charakteriſtik 0; die von 10 bis 100 die Charakteriſtik 1; die von 100 bis 1000 die Charakteriſtik 2 u. ſ. w. Man benennt den Logarithmum einer Zahl mit L oder l. Will man aber die Zahl ſelber wieder anzeigen, ſetzt man N vor L.

Funfzehenter Abſchnitt.

Von den Gleichungen.

§. 294. Einerlei Größe auf verſchiedene Weiſe ausgedrückt heißt eine Gleichung.

Z. B. $3 \cdot 6 = 10 + 8$.

Die Glieder der Gleichung nennt man diejenigen Theile, die durch die vier Rechnungsarten und andere Zeichen zuſammenhängen.

§. 295. Nach den Grundſätzen (§. 11. I-VII.) bleibt die Gleichung unverändert, man mag beiderſeits Gleiches addiren, ſubtrahiren, mit Gleichem multipliciren oder dividiren, gleiche Potenzen ſetzen, oder gleiche Wurzeln ausziehen, die Zeichen beiderſeits verändern, oder auch durch die Addition und Subtraction auf einer Seite die Gleichung auf Nichts bringen.

1. Gleiches addiren.

$$\begin{array}{r} 3a - x = b \\ x = x \\ \hline 3a = b + x \end{array}$$

2. Glei-

2. Gleiches ſubtrahiren.

$$\begin{array}{r} 3a = b + x \\ b = b \\ \hline 3a - b = x \end{array}$$

3. Mit Gleichem multipliciren.

$$\begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \\ \hline x = ab \end{array} \; .\,b$$

4. Mit Gleichem dividiren.

$$\begin{array}{l} ax = b \\ \hline x = \frac{b}{a} \end{array} \; : a$$

5. Gleiche Potenzen ſetzen.

$$\begin{array}{l} x^2 = a \\ \hline x = \sqrt{a}. \end{array} \; \sqrt{\ } \text{ extrah.}$$

6. Gleiche Wurzeln ausziehen.

$$\begin{array}{l} \sqrt{x} = ab \\ \hline x = a^2 b_2 \end{array} \; \text{quadr.}$$

7. Durch die Addition und Subtraction auf einer Seite die Gleichung auf Nichts bringen.

$$\begin{array}{r} a^2 - bx = c \\ c = c \\ \hline a^2 - bx - c = 0. \end{array} \; \text{ſubtrah.}$$

§. 296. Eine einfache Gleichung iſt, in welcher die unbekannte Größe, wie x oder y, nur in der erſten Potenz oder Dignität ſich befindet. Eine ſolche einfache Gleichung iſt leicht aufzulöſen. Z. B. Das Exempel §. 295. Nro. 7.

$$a^2 - bx - c = 0$$
$$bx = bx$$
$$a^2 - c = bx \quad : b$$
$$\frac{a^2 - c}{b} = x.$$

Hier hat man die unbekannte Größe gefunden, indem man bx beiderſeits addirt. Ueberhaupt beſteht die ganze Kunſt darinnen, daß man alle bekannte Glieder auf eine Seite ſchafft, damit das unbekannte Glied auf der andern Seite allein bleibe.

§. 297. In einer einfachen Gleichung können auch mehr unbekannte Größen ſich finden, man darf aber keine mit der andern multipliciren, weil ſonſt, bei der Auflöſung ſelbſt, Gleichungen herauskommen würden, die nicht mehr einfach ſind.

Z. B. Man ſoll zwo Zahlen finden, deren Summe und Differenz gegeben iſt. Wenn die geſuchten Zahlen x und y, die Summe a, die Differenz b iſt, ſo iſt $x + y = a$, und $x - y = b$.

1) $$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \\ \hline 2x = a + b \\ \hline x = \frac{a+b}{2} \end{array}$$ addirt, : 2

2) $$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = b \\ - \; + \\ \hline 2y = a - b \\ \hline y = \frac{a-b}{2} \end{array}$$ ſubtrahirt, : 2

Die größere Zahl x iſt alſo die halbe Summe zur halben Differenz addirt; die kleinere Zahl y iſt die halbe Differenz von der halben Summe ſubtrahirt.

Sechzehenter Abſchnitt.

Von höhern Aufgaben der practiſchen Rechenkunſt.

§. 298. Obgleich von den quadratiſchen ſowohl reinen als unreinen Gleichungen, von höhern Gleichungen überhaupt, von den Wurzeln der zuſammengeſetzten Gleichungen, von Erfindung der Wurzeln und der Diviſorum einer Gleichung, von der Beſtimmung der Coefficienten bei Ausdruckungen durch unendliche Reihen in dieſem Handbuch Nichts

nichts geſagt werden darf, ſo glaube ich doch, daß nachſtehende Exempel, nach Vorausſetzung der Lehre von den einfachen Gleichungen, zu verſtehen nicht ſchwer fallen werden.

§. 299. Die ganze Kunſt bei höhern Aufgaben beſteht darinnen, daß man den erſten Satz richtig ausdrücke, oder das Problem verſtehe, und hernach richtig ſetze. Iſt diß geſchehen, ſo darf man in den folgenden Sätzen nur calculiren.

Erſtes Exempel.

Ein Kaufmann vermehrt ſein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahre zur Erhaltung ſeiner Familie 100 Gulden davon weg, und wird nach drei Jahren noch einmal ſo reich, als er anfänglich war.

Wie viel hat er Vermögen?

1. Ein Kaufmann hat ein gewiſſes Vermögen,	x
2. wovon er das erſte Jahr 1000 Gulden ausgibt,	$x - 1000$
3. zu dem Reſt gewinnt er noch den dritten Theil,	$x - 1000 + \frac{x - 1000}{3}$ d. i. $\frac{4x - 4000}{3}$

 4. im

4. im zweiten Jahr gibt er wieder 1000 Gulden aus,	$\frac{4x-4000}{3} - 1000$ d. i. $\frac{4x-7000}{3}$
5. den Reſt vermehrt er abermals um den dritten Theil,	$\frac{4x-7000}{3} + \frac{4x-7000}{9}$ d. i. $\frac{16x-28000}{9}$
6. im dritten Jahr gibt er wieder 1000 Gulden aus,	$\frac{16x-28000}{9} - 1000$ d. i. $\frac{16x-37000}{9}$
7. den Reſt vermehrt er wieder um den dritten Theil,	$\frac{16x-37000}{9} + \frac{16x-37000}{27}$ d. i. $\frac{64x-148000}{27}$
8. hierauf wird er noch einmal ſo reich als vorher.	$\frac{16x-148000}{27.} = 2x$

Daß die eben bemeldte Gleichungen nro. 3 bis 7 durch Multiplication und Addition entſtanden, iſt leicht

leicht einzuſehen. Bei nro. 3. wurde z. B. x — 1000 mit dem Nenner 3 multiplicirt und der Zähler x — 1000 addirt; bei nro. 4. die Zahl — 1000 mit dem Nenner 3 multiplicirt, und der Zähler 4 x — 4000 addirt; bei nro. 5. der Nenner 3 des einen Bruchs mit dem Zähler 4 x — 7000 des andern Bruchs multiplicirt, und der Zähler des erſten Bruchs addirt u. ſ. w. bei nro. 7. wurde, ſtatt des Nenners 9, mit 3 in den Zähler des andern Bruchs multiplicirt, und der Zähler des erſten Bruchs addirt.

§. 300. Die Reduction bei dem erſten Exempel ſich begreiflich zu machen, ſtelle man ſich eine Gleichung als eine Waage vor, welche innen ſteht, und in deren beiden Schalen bezeichnete Gewichtſteine und Stücke Waare von unbekanntem Gewichte unter einander liegen. Man ſtellt ſich nun hier die bekannten Größen oder Zahlen als gezeichnetes Gewicht, die unbekannten aber als Stücke Waare, deren Gewicht man nicht weiß, und den Waagbalken durch das Zeichen = vor. Die §. 299. gefundene Gleichung $\frac{64\,x}{27} - \frac{148000}{27} = 2\,x$ kann alſo auf folgende Art erklärt werden:

In einer Waagſchale liegen von einer Waare, welche x heißt, 64 Stücke, doch nur von jedem Stück der 27ſte Theil, weniger $\frac{148000}{27}$ an gezeichneten Gewichtſteinen; in der andern Waagſchale lie-

liegen 2 ganze Stücke von der Waare. Ich will nun wiſſen, wie viel ein Stück ſolcher Waare wäre, und dieſes könnte ich erfahren, wenn ein ſolches Stück ganz allein in der einen Waagſchale, und in der andern lauter Gewichtſteine lägen, wobey aber die Waage noch immer inne ſtünde. Dieſes würklich zu erfahren, will ich ſo lang aus einer Waagſchale ſoviel Gewichtſteine oder Stücke Waare nehmen, als aus der andern, oder in eine ſoviel legen, als in die andere, oder das, was in jeder Schale liegt, verdoppeln, oder ſonſt vervielfältigen oder halbiren, oder ſonſt in gleiche Theile theilen, bis ich in einer Wagſchale das Stück Waare allein habe, und in der andern die Gewichtſteine. Nun will ich machen, daß ich keine Stücke Waare mehr habe, die nur der 27ſte Theil ſind, ſondern ich will ganze haben, darum will ich ein jedes 27mal nehmen, oder das ganze Gewicht in jeder Schale 27mal vervielfältigen, d. i. mit 27 multipliciren; und dieſe Handlungsart iſt faſt immer nöthig, um die Brüche wegzuſchaffen. Alſo:

$$\frac{64\,x}{27} - \frac{148000}{27} = 2\,x$$

ſollen mit 27 multiplicirt werden, die beiden Brüche ſo gut, als die Gleichung von 2 x, nur mit dem Unterſchied, daß die zween Zähler der Brüche, nachdem ſie multiplicirt worden, wieder durch ihre Nenner, nemlich 27, dividirt werden. Es kommen nun die Quotienten

$64x - 148000$ im erſten Fall, und das Produkt $= 54x$ im andern Fall heraus.

Auſſer dem, daß die obige Behandlungsart der Brüche durch Multiplication und Diviſion

$64x - 148000$ giebt,

läßt ſichs noch auf eine andere Weiſe erklären, warum $\frac{64x}{27}$ mit 27 multiplicirt $64x$ gebe, nemlich $\frac{1}{27}$ mit 27 multiplicirt giebt $\frac{27}{27}$ oder Eins; $\frac{2}{27} \cdot 27$ gibt 2mal $\frac{27}{27}$ oder zwei u. ſ. w. Ueberhaupt, wenn ein Bruch mit ſeinem Nenner multiplicirt wird, ſo iſt es eben ſo viel, als würde nur der Nenner weggelaſſen, und der Zähler bliebe allein ſtehen.

In einer Schale fehlen nun 148000, dieſe will ich erſetzen, und in die andere auch ſoviel thun, d. i. 148000 addiren z. B.

$$\begin{array}{lrcl} & 64x - 148000 & = & 54x \\ \text{add.} & 148000 & & 148000 \\ \hline & 64x & = & 54x + 148000 \end{array}$$

Aus beiden Schalen will ich 54 Stücke Waare (d. i. $54x$) wegnehmen, z. B.

$$\begin{array}{lrcl} & 64x & = & 54x + 148000 \\ \text{ſubtr.} & 54x & = & 54x \\ \hline & 10x & = & 148000 \end{array}$$

Da nun in einer Schale 10 Stück Waare liegen, in der andern an Gewichtſteinen 148000, ſo will ich nur ein Stück Waare behalten, und von 148000 auch nur den zehenten Theil, d. i. ich will mit 10

 divi-

dividiren, ſo wird meine Waage innen ſtehen, zum Beiſpiel

$$\frac{10\,x = 148000}{x = 148000.}$$

§. 301. Zweites Exempel.

Jemand, welcher gefragt wurde, wie viel er Geld habe, gab zur Antwort, daß er ſein Geld in vier Beuteln habe, in dem erſten ſei der ſiebente, in dem andern der fünfte, in dem dritten der ſechste Theil, und in dem vierten der Reſt. In den erſten dreien habe er zuſammen 321 Gulden. Nun fragt ſich, wie viel er überhaupt, und in jedem beſonders habe?

Er hat gehabt x

im erſten Beutel $\frac{x}{7} = \frac{30\,x}{210}$

im zweiten, $\frac{x}{5} = \frac{42\,x}{210}$

im dritten $\frac{x}{6} = \frac{35\,x}{210}$

zuſammen $321 = \frac{107\,x}{210}$

$321 = 107\,x$

multipl. $210 \quad \frac{210}{210.}$

$67410 = 107\,x$

divid. $107 = 107$

$630 = x$

Stellt

Stellt man die Probe an, ſo zeigt ſich, daß

$$\frac{x}{7} = 90$$
$$\frac{x}{5} = 126$$
$$\frac{x}{6} = 105$$

321 ſubtr.
630

Folglich im vierten 309

Oben ſind die Brüche $\frac{x}{7}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{6}$, unter gleiche Benennung gebracht worden, wie §. 73. ſteht, und hieraus ſind die gegenüberſtehenden Gleichungen entſtanden. Wie viel aber in eines jeden Beutel war, hat man durch die Diviſion der Nenner, 7, 5, 6 in den Quotienten 630 erfahren.

§. 302. Drittes Exempel.

Zwo Zahlen zu finden, die zuſammen 660 ausmachen, deren eine aber um 330 gröſſer iſt, als die andere.

Die eine Zahl ſei $= x$
die andere um 330 gröſſer $= x + 330$

$$2x + 330 = 660$$
$$330 \qquad 330$$

ſubtr. $2x = 330$
div. $2 = 2$

Probe $x = 165$

Eine Zahl $= 165$
die andere $= 495$

660

§. 303. Viertes Exempel.

Eine Zahl zu finden, daß, wenn man 9 dazu addirt, und die Summe mit 5 dividirt, 13 herauskomme.

Die Zahl, welche zu finden iſt,

ſei	=	x
9 dazu addirt	=	$x + 9$
mit 5 dividirt	=	$\frac{x + 9}{5}$

$$\text{folglich } \frac{x+9}{5} = 13$$

$$\text{mult. } 5 \qquad 5$$

$$x + 9 = 65$$

$$\text{ſubtr. } 9 \qquad 9$$

$$x = 56.$$

§. 304. Fünftes Exempel.

Eine Zahl ſoll man finden, welche, obgleich der fünfte und dritte Theil von ihr weggenommen worden, doch noch 14 übrig behält.

Die Zahl	=	x
der fünfte Theil	=	$\frac{x}{5}$
der dritte Theil	=	$\frac{x}{3}$
zuſammen		$\frac{8x}{15}$

Dieſe $\frac{8x}{15}$ entſtehen, wenn man die beiden Brüche unter einerlei Benennung bringt.

Zieht

Zieht man nun die Zahl x von der Summe $\frac{8x}{15}$ ab, ſo bleiben $\frac{7x}{15}$, übrig, und dieſe ſind = 14 Alſo

$$\frac{7x}{15} = 14$$

$$\text{mult. } 15 \quad 15$$

$$7x = 210$$

$$\text{div. } 7 \quad 7$$

$$x = 30$$ = der Zahl, die man geſucht hat.

§. 305. Sechstes Exempel.

Sechs Perſonen nehmen an einem Erbtheil à 18000 Gulden Antheil. Der zweite bekommt dreimal ſoviel, als der erſte; der dritte noch einmal ſoviel, als der erſte und zweite zuſammen; der vierte dreimal ſoviel als der dritte; der fünfte noch einmal ſoviel als der vierte, der ſechste noch einmal ſoviel, als der fünfte. Wie viel hat jeder bekommen?

Der erſte	=	x
zweite	=	3 x
dritte	=	8 x
vierte	=	24 x
fünfte	=	48 x
ſechste	=	96 x

$$180\,x = 18000$$

$$\text{div. } 180 = 180$$

$$x = 100$$

der erſte bekam	100 fl	
zweite	300	
dritte	800	
vierte	2400	
fünfte	4800	
ſechste	9600	
	18000 fl.	

§. 306. Siebentes Exempel.

Wenn ein Lehrmeiſter von jedem ſeiner Schüler zur Erkaufung eines Gartens 5 fl bekommt, ſo hat er nun 42 fl zu wenig. Bekommt er von jedem ſeiner Schüler 6 fl, ſo hat er nun 58 fl zu viel. Wie viel Schüler hatte er? Wie viel koſtete ſein Garten? die Anzahl der Schüler ſei x. Gibt jeder 5 fl, ſo hat er 5 x, folglich koſtet der Garten 5 x + 42 fl. Gibt jeder 6 fl, ſo hat er 6 x, folglich koſtet der Garten 6 x — 58 fl; daher

$$5x + 42 = 6x - 58$$
ſubtr. $5x \qquad 5x$

$$42 = x - 58$$
add. $58 \qquad + 58$

$$100 = x$$

Es waren alſo 100 Schüler.

Gab jeder 5 fl, ſo hatte der Lehrmeiſter 500 fl, und diß war um 42 fl zu wenig, folglich koſtete der Garten 542 fl; gab ieder 6 fl, ſo hatte der Lehrmeiſter 600 fl, und diß war um 58 fl zuviel; folglich koſtete der Garten 542 fl.

§. 307. Achtes Exempel.

Ein General ſtellt ſeine Soldaten in eine viereckige Schlachtordnung, und da bleiben ihm 284 Mann übrig. Darauf ſtellt er in jede Reihe einen Mann mehr, und macht auch eine Reihe weiter, da hat er 25 zu wenig. Wie viel hatte er?

Er habe das erſtemal in eine Reihe geſtellt x
ſo macht die viereckige Schlachtordnung xx
folglich waren ſeine Soldaten zuſammen $xx + 284$.
Stellt er in jede Reihe einen Mann weiter, ſo waren es $x + 1$ und alle zuſammen

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x + 1 \\ \hline x + 1 \\ xx + x \\ \hline xx + 2x + 1 \end{array}$$

folglich waren ſeine Soldaten zuſammen
$xx + 2x + 1 - 25$; daher

$$\begin{array}{lrcl} & xx + 284 & = & xx + 2x - 24 \\ \text{ſubtr.} & xx & & xx \\ \hline & 284 & = & 2x - 24 \\ \text{add.} & 24 & & 24 \\ \hline & 308 & = & 2x \\ \text{divid.} & 2 & & 2 \\ \hline & 154 & = & x \end{array}$$

daher machte 154mal 154 und noch 284 die Anzahl ſeiner Soldaten aus, nemlich 24000, oder 155mal 155, weniger 25.

§. 308. Neuntes Exempel.

Ein Oberſter hat unter ſich etliche Hauptleute. Ein jeder Hauptmann hat noch ſo viel Unterhauptleute unter ſich, als Hauptleute ſind. Ein jeder Unterhauptmann hat viermal ſo viel Soldaten als Hauptleute, und jeder Hauptmann hat 9 Soldaten zu ſeiner Bedienung, welches den 200ſten Theil von allen Soldaten macht. Wie viel ſind von jeden?

Hauptleute waren x.

Unter jedem Hauptmann ſind Unterhauptleute 2 x, alſo alle Unterhauptleute zuſammen 2 x x.

Unter jedem Unterhauptmann ſind Soldaten 4 x,

daher alle Soldaten zuſammen $8\,x^3$.

Hat jeder Hauptmann 9 Soldaten, ſo ſind 9 x, folglich

$$9\,x = 8\,x^3 : 200$$
$$9\,x = x^3 : 25$$
ſubtr. $x \qquad x$

$$9 = x^2 : 25$$

$$225 = x^2$$

Wird die Wurzel aus 225 und aus x^2 gezogen, ſo iſt ſie $15 = x$.

§. 309.

§. 309. Zehentes Exempel.

Aus der gegebenen Tagreiſe zweier Boten und der Zeit, da der andere dem erſten nachgeht, die Zeit zu beſtimmen, wenn er den erſten einholt. Der erſte Bot gehe täglich 5 Meilen, der andere 7 Meilen, der erſte ſei ſchon 6 Tage weg, er ſollte von dem andern in x Tagen eingeholt werden, ſo iſt die Zeit,

da der erſte lauft $6 + x$
und da er täglich fünf Meilen lauft 5

ſo iſt ſein ganzer Weg $30 + 5x.$

Die Zeit des andern iſt nur x
und täglich geht er 7

$7x.$

Nun laufen ſie einen gleichen Weg durch, daher iſt

$$30 + 5x = 7x$$
ſubtr. $5x \quad 5x$

$$30 = 2x$$
div. $2 \quad 2$

$$15 = x$$

die allgemeine Regel für die vorhergehende Aufgabe iſt folgende.

Tagreiſe des erſten $= a = 5$
andern $= b = 7$
die Zeit, da der erſte hinweg $= c = 6$
die Zeit, da der andere ihn einholen ſolle $= x = x$

ſo

ſo iſt des erſten Weg

$$= c + \frac{x}{a} \qquad = 6 + \frac{x}{5}$$

$$ac + ax \qquad 30 + 5x$$

des andern $= bx = 7x$

daher $bx = ac + ax$ oder $7x = 30 + 5x$

$$ax \qquad ax \qquad 5x \qquad 5x$$

$$bx - ax = ac \qquad 7x - 5x = 30$$

$$b - a \qquad b - a \qquad 7 - 5 \qquad 7 - 5$$

$$x = \frac{ac}{b - a}. \qquad x = \frac{30}{7 - 5}$$

$$x = 15$$

Die Regel iſt: Multipliciret die Tagreiſe des erſten mit der Zeit, da er hinweg iſt, und dividiret das Product mit dem Unterſchied der Tagreiſen beider Boten, ſo habt ihr die geſuchte Zeit.

§. 130. Eilftes Exempel.

Eine Zahl zu finden, deren dritter Theil um 17 mehr iſt, als der vierte.

Die Zahl $= x$, ſo iſt

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 17$$

oder:

oder:

$$\frac{4x}{12} = \frac{3x}{12} + 17$$

ſubtr. $\frac{3x}{12}$ $\frac{3x}{12}$

$$\frac{x}{12} = 17$$

mult. 12 12

$$x = 204$$

denn $204 : 3 = 68$
$204 : 4 = 51$

die Zahl 68 iſt um 17 weniger, als die Zahl 51.

§. 311. Zwölftes Exempel.

Ein Springbrunnen hat 4 Röhren, durch eine wird der Kaſten in 2 Stunden voll, durch die andere in 3 Stunden, durch die dritte in 6 Stunden, und durch die vierte in 4 Stunden. Wie bald wird er voll, wenn alle 4 zugleich laufen?

Die geſuchte Zeit ſei $= x$
der Innhalt des Kaſtens $= y$
und man kann ſprechen

In 2 Stunden wird y voll, was in x? $\frac{xy}{2}$

3 Stunden wird y voll, was in x? $\frac{xy}{3}$

6 Stunden wird y voll, was in x? $\frac{xy}{6}$

4 Stunden wird y voll, was in x? $\frac{xy}{4}$

$$\frac{5xy}{4}$$

$$
\begin{array}{lccc}
\text{daher} & y & = & \frac{5x}{4} \\
\text{div.} & y & & y \\
\hline
 & 1 & = & \frac{5x}{4} \\
\text{mult.} & 4 & & 4 \\
\hline
 & 4 & = & 5 \\
 & 5 & & 5 \\
\hline
 & \frac{4}{5} & = & x
\end{array}
$$

$\frac{4}{5}$ Stunden ſind 48 Minuten, denn 4. 60 = 240: 5 = 48. Lauft durch die erſte Röhre der Kaſten 120 Minuten, ſo lauft in 48 Minuten nur $\frac{2}{5}$ voll, und ſo in den übrigen.

Mehrere leichtere Exempel ſind hier überflüſſig, und die ſchwereren z. B. die von quadratiſchen Gleichungen, und die, welche durch Progreſſionen und Logarithmen aufgelöst werden, gehören in die eigentliche Algebra, wozu die Buchſtaben — und Logarithmenrechnung den Weg gebahnt haben.

Geo-

Geometrie.

Geometrie.

Erſter Abſchnitt.

Von der Elementargeometrie.

§. 312.

Das griechiſche Wort Geometrie kann im Teutſchen durch eine Wiſſenſchaft, die Erde zu meſſen, ausgedruckt werden. Es wird aber dieß Wort in der Mathematik in einem weitläuftigern Verſtand genommen, wie oben (§. 12.) gemeldet worden.

Die Wörter Länge, Breite und Dicke, ſind dem Sprachgebrauch nach nicht Namen verſchiedener Ausdehnungen, ſondern einer einigen, der Länge, die nach verſchiedenen Richtungen an dem Körper betrachtet wird.

§. 313. Die Gränze einer Sache heißt ihr Aeuſſerſtes, oder wo ſie aufhört.

§. 314. Eine ſtetige ausgedehnte Gröſſe iſt, deren Theile alle ſo zuſammenhängen, daß, wo einer aufhört, gleich der andere anfängt, und zwiſchen des einen Ende und des andern Anfang Nichts iſt, das nicht zu dieſer Gröſſe gehörte.

§. 315. Die geometriſche Ausdehnung iſt ein Raum, den die ſtetige Gröſſe nach allen Seiten zu ausfüllt.

§. 316. Die körperliche Ausdehnung oder ein geometriſcher Körper heißt eine ſolche Ausdehnung, die das, was ſich innerhalb ihrer Gränzen befindet, überall, nach allen Seiten zu umgibt.

§. 317. Die Ausdehnung der Körper an ihren Gränzen heißt eine Fläche, die Ausdehnung der Fläche an ihren Gränzen eine Linie, die Gränze der Linie aber iſt ein Punct.

Ein Fiſch, der im Innern eines Fluſſes ſchwimmt, iſt überall mit Waſſer umgeben, und kann ſich nirgends hin bewegen, ohne Waſſer aus der Stelle, wo er hin will, zu treiben.

§. 318. Der Punct iſt nicht nur die Gränze der Linie, ſondern die Gränze aller Ausdehnung. Er hat alſo weder Ausdehnung, noch Theile, und eine Menge an einander geſetzter Puncte macht keine Linie aus, aber die Linie kann aufhören wo man will, folglich überall Puncte haben. Es iſt aber einerlei, ob man in der Linie Puncte annimmt, oder ob man ſich einen einigen Punct vorſtellt, der nach und nach in verſchiedene Stellen der Linie gekommen wäre. Man ſagt daher, daß eine Linie aus der Bewegung eines Puncts von einem Ort gegen den andern entſtehe; jedoch will dieſes nicht ſo viel ſagen, daß die Linie aus einer Menge Puncte beſtehe, die an einander liegen; denn es läßt ſich keine

ne Bewegung vorſtellen, ohne den Ort, den der Punct ſetzt, und den er im nächſten Augenblick einnimmt, in einiger Entfernung von einander zu ſetzen, und dieſe **Entfernung** iſt ſchon **eine Linie**, und die groſſe Linie beſteht aus ſolchen Entfernungen aus kleinern Linien, nicht aus Puncten.

Man kann ſich einen ſinnlichen Begriff hievon machen, wenn man die Spitze eines Bleyſtifts auf dem Papier fortführt. Man ſieht dieſe Spitze zwar als einen Punct an, und zieht ihre Gröſſe in keine Betrachtung; aber ſie läßt kleine Theile auf dem Papier ſitzen, welche die Spuren vorſtellen, die ein Punct nach ſich laſſen würde, der ſich eben ſo bewegte. Der Strich, den man mit dem Bleyſtift macht, iſt alſo eine Reihe kleiner Körper, wobey man aber nicht darauf achtet, wieviel ſie ſich über das Papier erheben, ſondern nach was für einer Gegend ſie liegen, d. i. man ſieht bey dieſer Reihe blos auf die Ausdehnung der **Linie**. Je zärter nun ein ſolcher Strich iſt, je weniger ſeine Fläche, ſeine körperliche Ausdehnung in die Sinne fällt, deſto ähnlicher iſt er dem Bild einer Linie.

§. 319. Eine **gerade** Linie iſt, deren Theile **nach einerley** Gegend zu liegen, oder von welcher ein jeder Theil der **ganzen Linie ähnlich** iſt. Tab. 1. Fig. 1.

Wenn man z. E. in A einen Punct ſetzt, ſo kann ſich derſelbe von ſeinem Ort nach willkührlichen Gegenden bewegen. Soll er nach B gehen, ſo iſt ſeine Gegend beſtimmt, er könnte aber eben ſowohl nach eben der Gegend noch über B hinaus nach F gehen. Gienge er aber von A nach C, ſo wäre ſein Gang nach der Gegend, die der erſten entgegen geſetzt iſt.

§. 320. Eine krumme Linie iſt, wo kein Theil mit dem andern nach einerley Gegend zu liegt, oder deren Theile der ganzen Linie unähnlich ſind. Tab. 1. Fig. 2.

Bey der krummen Linie geht der Punct, der ſich von A aus bewegt, nicht gleich nach F, ſondern nimmt verſchiedene ganz andere Wege, deren keiner ihn nach F führen würde, wenn er auf demſelben verbliebe. Es wird alſo eine krumme Linie von einem Punct beſchrieben, der ſich beſtändig von der Gegend, nach der er jetzt geht, in dem nächſtfolgenden Augenblick ablenkt, oder ſeinen Weg beſtändig ändert. Er ändert ihn aber nie plötzlich (wie Tab. 1. Fig. 3. aus GH in HI, aus HI in IK,) ſondern unmerklich, ſo, daß ſich nicht angeben läßt, um wie viel er jeden Augenblick von dem Wege des vorigen Augenblicks abgewichen ſey. Er geht (Fig. 2.) nicht unmittelbar von CE in EF, ſondern beſchreibt den Knoten EdDeE, der ihn durch unmerkliche Aenderungen des Weges in E in die Richtung bringt, aus der er ſich daſelbſt weiter ablenkt, in EF fortzugehen.

§. 321. Eine ebene Fläche, oder Ebene heißt, in der man von jedem Puncte zum andern gerade Linien ziehen kann, ſo, daß alle Puncte dieſer Linien in der Fläche liegen. Tab. 1. Fig. 4. Bey krummen Flächen läßt ſich kein ebener Theil angeben. Auf der krummen Fläche laſſen ſich von jedem Punct zum andern krumme Linien ziehen, es kann aber auch auf mancher krummen Fläche Puncte geben, durch welche ſich eine gerade Linie auf ihr ziehen läßt.

§. 322. Ein **ebener Winkel** iſt die Neigung zwoer geraden Linien gegen einander, die in einer Ebene liegen, und nicht eine einzige gerade ausmachen. Tab. 1. Fig. 5.

Der Ort, wo die beyden Linien zuſammen kommen, A, heißt die Spitze oder der Scheitel des Winkels, die Linien aber, wie AB, AC, werden die Schenkel genannt. Man pflegt den Winkel durch einen groſſen Buchſtaben, den man auſſen an die Spitze ſetzt, oder durch einen kleinen Buchſtaben, wie z. E. hier x, den man inwendig zwiſchen die Schenkel ſchreibt, oder durch die drey Buchſtaben, die man an die Spitze des Winkels und an die Endpuncte der Schenkel geſetzt hat, zu bezeichnen; doch muß in dieſem letztern Fall der Buchſtabe, welcher am Scheitel des Winkels ſteht, allemal in die Mitte geſetzt werden, wie hier z. E. BAC.

§. 323. Gerade Linien, welche ſich auf einer **ebenen** Fläche befinden, und niemals zuſammenſtoſſen können, wenn ſie auch auf beyden Seiten ohne Ende verlängert würden, heiſſen **parallele oder gleichlaufende Linien**.

Tab. 1. Fig. 6. wie AB und CD.

§. 324. Linien, die auf einer **ebenen** Fläche irgendwo zuſammenſtoſſen würden, wenn man ſie auf beyden Seiten verlängerte, werden in derjenigen Gegend, wo ſie ſich einander nähern, **zuſammengehende Linien**, wo ſie ſich aber von einander entfernen, **auseinanderfahrende Linien** genannt.

Tab. 1. Fig. 7. heiſſen A C zuſammengehende, BD aber auseinanderfahrende Linien.

§. 325. Winkel über einer geraden Linie, die einen gemeinſchaftlichen Schenkel und einen gemeinſchaftlichen Scheitel haben, nennt man Nebenwinkel.

Tab. 1. Fig. 8. haben die Winkel ABC und ABD den Schenkel AB und den Scheitel B mit einander gemein, und ſtehen auf der geraden Linie CBD.

§. 326. Wenn eine gerade Linie auf einer andern geraden Linie ſo ſteht, daß die Nebenwinkel gleich ſind, ſo wird die Linie ſenkrecht oder perpendicular genannt, und die Nebenwinkel ſind rechte Winkel.

Tab. 1. Fig. 9. ſteht AB auf CD ſenkrecht und ABD, ABC ſind rechte Winkel.

§. 327. Alle Winkel, die nicht rechte Winkel ſind, nennt man ſchiefe Winkel.

§. 328. Diejenigen ſchiefen Winkel, die kleiner ſind, als rechte Winkel, d. i. deren Schenkel eine geringere Entfernung von einander haben, als die Schenkel der rechten Winkel, heiſſen ſpitzige Winkel; die aber gröſſer ſind, als rechte Winkel, heiſſen ſtumpfe Winkel.

Tab. 1. Fig. 9. iſt EBD ein ſtumpfer, EBC aber ein ſpitziger Winkel.

§. 329. Eine Fläche, die in Linien eingeſchloſſen iſt, heißt eine Figur, und die Linien, welche die

die Gränzen derſelben ausmachen, werden die Seiten der Figur genannt.

§. 330. Wenn die Seiten einer Figur krumme Linien ſind, ſo heißt die Figur eine krummlinichte Figur.

§. 331. Eine krummlinichte Figur, in welcher alle Puncte ihrer Gränze einerley Abſtand von einem gewiſſen mittlern Puncte haben, heißt ein Cirkel.

§. 332. Ein Cirkel entſteht daher, wenn ſich eine gerade Linie auf der Ebene um einen feſten Punct bewegt, biß ſie wieder in die vorige Lage kommt. Tab. I. Fig. 10.

Die gerade Linie heißt AC;

Der feſte Punct, der auch Mittelpunct, genannt wird, C;

Der Weg, den der Punct A gemacht hat, ADB FGH, iſt des Cirkels Umfang, und heißt auch Peripherie.

Der Raum, über welchen CA weggegangen, iſt des Cirkels Fläche;

Jede Linie durch den Mittelpunct, ſo viel von ihr zwiſchen der Peripherie enthalten iſt, iſt wie BCA der Durchmeſſer.

Die Helfte des Durchmeſſers oder der Linie BCA heißt Halbmeſſer, BC und CA;

Linien, die von der Peripherie eingeſchloſſen werden, ohne durch den Mittelpunct zu gehen, ſind Sehnen wie FG, GH, FH.

Das Stück der Cirkelfläche zwiſchen einer Sehne (wie FH) und einem Bogen des Cirkels (wie FGH) wird Abſchnitt oder Segment genannt.

Die Fläche, die zwiſchen zween Halbmeſſern DC, CE und ihrem Bogen DE enthalten iſt, heißt Ausſchnitt oder Sector.

Die Linie, welche die Peripherie des Cirkels auswendig berührt, ohne ihn zu ſchneiden, wenn ſie auch verlängert würde, wie TA, heißt Tangente, oder Berührungslinie.

§. 333. Alle Halbmeſſer, und alle Durchmeſſer eines Cirkels, oder gleicher Cirkel, ſind einander gleich; und wenn zween Cirkel gleich groſſe Durchmeſſer oder Halbmeſſer haben, ſo müſſen ſie einander ſelbſt gleich ſeyn.

§. 334. Ebene Figuren, die in gerade Linien als Seiten eingeſchloſſen ſind, heiſſen geradelinichte Figuren, z. B. Dreiecke; Vierecke; Vielecke.

§. 335. Eine Figur, die drey Seiten hat, heißt Dreyeck oder Triangel. Man kann ein Dreyeck nach ſeinen Seiten und nach ſeinen Winkeln betrachten.

§. 336. Sind in einem Dreyeck alle drey Seiten einander gleich, ſo iſt es ein gleichſeitiges Dreyeck.

Tab. I. Fig. II. wo AB = AC = CB.

§. 337.

§. 337. Sind in einem Dreyeck nur zwo Seiten oder zween Schenkel einander gleich, ſo heißt es ein gleichſchenklichtes Dreyeck.

Tab. 1. Fig. 12. wo nur AC = CB.

§. 338. Iſt in einem Dreyeck keine Seite der andern gleich, ſo iſt es ein ungleichſeitiges Dreyeck.

Tab. 1. Fig. 13. wo CA, AB, BC verſchiedene Seiten ſind.

§. 339. Ein Dreyeck, in welchem einer von den Winkeln ein rechter Winkel iſt, heißt ein rechtwinklichtes Dreyeck.

Tab. 1. Fig. 14.

§. 340. Ein Dreyeck, in welchem einer von den Winkeln ein ſtumpfer Winkel iſt, wird ein ſtumpfwinklichtes Dreyeck genannt.

Tab. 1. Fig. 15.

§. 341. Ein Dreyeck, worinn alle drey Winkel ſpitzig ſind, heißt ein ſpitzwinklichtes Dreyeck.

Tab. 1. Fig. 16.

§. 342. Man pflegt die Triangel durch die drey Buchſtaben zu benennen, die an den Spitzen der Winkel ſtehen, aber mit Vorſetzung des Zeichens △, damit man ſie von den bloſſen Winkeln unterſcheiden könne.

§. 343. Eine Figur, die vier Seiten hat, heißt ein Viereck.

§. 344.

§. 344. Ein Quadrat iſt eine Figur, die vier gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat.

Tab. 1. Fig. 17. ſind die Seiten AB, CD, AC, BD einander gleich.

§. 345. Ein länglichtes Viereck hat lauter rechte Winkel, aber es ſind nur die zwo entgegengeſetzte Seiten einander gleich.

Tab. 1. Fig. 18. wo CD = AB und AC = BD.

§. 346. Eine Raute hat vier gleiche Seiten, und lauter ſchiefe Winkel.

Tab. 1. Fig. 19. ſind die Seiten AB, AC, BD, CD einander gleich.

§. 347. Eine länglichte Raute hat zwar lauter ſchiefe Winkel, aber nur die beyden einander entgegengeſetzten Seicen ſind einander gleich.

Tab. 1. Fig. 20. ſind nur die Seiten AB und CD, ſodann AC und BD einander gleich.

§. 348. Diejenigen Vierecke, in welchen keine der (§. 342 bis 347.) erzählten Eigenſchaften angetroffen wird, heiſſen ungleichſeitige Vierecke.

Tab. 2. Fig. 21.

§. 349. Diejenigen Vierecke, in welchen die gegenüberſtehenden Seiten parallel ſind, werden Parallelogramme genannt.

§. 350. Figuren, die mehr, als vier Seiten haben, nennt man überhaupt Polygone oder Vielecke.

§. 351.

§. 351. Vielecke werden blos dadurch von einander unterſchieden, daß man ſie von der Anzahl ihrer Seiten oder ihrer Winkel benennt. So iſt z. E. ein Sechseck eine Figur, die ſechs, ein Siebeneck eine Figur, die ſieben Seiten hat.

§. 352. Vielecke werden in ordentliche und unordentliche eingetheilt.

§. 353. Ein ordentliches Vieleck hat lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel.
Tab. 2. Fig. 22.

§. 354. Ein unordentliches Vieleck iſt, das weder lauter gleiche Seiten, noch lauter gleiche Winkel hat.
Tab. 2. Fig. 23.

§. 355. Wenn in zwoen Figuren einerley Winkel in einerley Ordnung nach einander folgen, und die Seiten, welche einerley Winkel in beyden Figuren einſchlieſſen, ſich ebenfalls in einerley Ordnung in der einen Figur eben ſo gegen einander unter ſich verhalten, wie ſie ſich in der andern Figur gegen einander unter ſich verhalten, ſo heiſſen die Figuren ähnlich.

Oder:

Aehnlich heiſſen die Figuren, wenn ihre Theile einerley Lage und Verhältniß haben.

§. 356. Eine Figur in einen Cirkel beſchrieben wird genannt, wenn ſich die Scheitel aller

ihrer Winkel in der Peripherie des Cirkels befinden, und der Cirkel heißt alsdenn um die Figur beſchrieben.

Tab. 2. Fig. 22.

§. 357. Wenn alle Seiten einer Figur den Umkreis eines Cirkels berühren, ſo ſagt man, daß der Cirkel in die Figur und die Figur um den Cirkel beſchrieben ſey. Tab. 2. Fig. 24.

§. 358. Durch jede zween gegebene Punkte läßt ſich eine gerade Linie ziehen, und nach Gefallen verlängern.

§. 359. Durch zween Puncte überhaupt iſt die Lage, und durch die zween Endpuncte wird die Länge einer geraden Linie gegeben.

§. 360. Aus jedem Mittelpunct und mit jedem Halbmeſſer läßt ſich ein Cirkel beſchreiben.

§. 361. Durch zween Puncte kann nur eine gerade Linie gehen; alſo ſchlieſſen zwo gerade Linien keinen Raum ein.

§. 362. Wenn zwo gerade Linien zuſammen ſtoſſen, ohne eine einige gerade Linie auszumachen, ſo haben ſie nichts, als einen Punct mit einander gemein. Wenn nun beyde Linien verlängert werden, ſo durchſchneiden ſie einander in dieſem Punct, ſo, daß von jeder Linie etwas auf beyden entgegengeſezten Seiten des Punctes iſt.

§. 363. Wenn man Gröſſen dergeſtalt auf einander legt, daß alle Gränzen der einen Gröſſe, und

was

was dazwiſchen enthalten iſt, auf die Gränzen der andern Gröſſe, und was dazwiſchen enthalten iſt, fallen, ſo nennt man ſie gleich und ähnlich, und von ſolchen Gröſſen ſagt man, nach der Sprache der Geometrie, daß ſie einander decken, oder congruent ſeyen.

§. 364. Gerade Linien und Winkel, die gleich ſind, decken einander.

§. 365. Winkel heiſſen gleich, wenn die Neigung ihrer Schenkel einerley iſt, obſchon dieſe eine verſchiedene Länge haben.

§. 366. Zween Winkel decken einander, wenn nur ihre Scheitel und Schenkel auf einander fallen.

§. 367. Von Gröſſen, die einander decken, kann die eine völlig in den Raum der andern geſetzt werden; alſo iſt unter ihnen für die geometriſche Betrachtung kein Unterſchied.

§. 368. Alle rechte Winkel ſind gleich, denn ſie decken einander.

§. 369. Ein Durchmeſſer theilt eine Cirkelfläche in zwey ähnliche und gleiche Stücke.
Tab. 2. Fig. 25.

Der Durchmeſſer heißt DA; das eine ähnliche und gleiche Stück heißt DBA, und das andere Stück DbA. Stellt man ſich nun vor, daß das Stück DBA unter DbA liege, daß die Puncte D, A, und folglich die Linie DA ungeändert bleiben, ſo muß jeder Punct des Umfangs des herunter gelegten

ten Stücks DBA am Ende einer Linie liegen, die durch C geht, und dem Halbmeſſer gleich iſt, aber am Ende jeder ſolchen Linie liegt ein Punct des Umfangs des Stücks DbA, alſo fällt jeder Punct des einen Umfangs auf einen Punct des andern, oder beyde Umfänge decken einander; die Linie DA aber iſt die andere Gränze dieſer beyden Stücke der Cirkelfläche, und iſt beyden gemein, alſo ſind beyde Stücke gleich.

Wenn man von einem Punct des Umfangs B die Linie BC zieht, ſo deckt der Winkel BCA den ihm gleichen Winkel bCA, und ſo fällt jeder Punct des einen Halbkreiſes auf einen eigenen Punct des andern Halbkreiſes.

§. 370. **Der Umfang eines Kreiſes um den Mittelpunct iſt eine zuſammenhängende krumme Linie.**

Tab. 2. Fig. 26.

Wenn von der geraden Linie CB ein Punct wie B innerhalb der Cirkelfläche und näher bey dem Mittelpunct iſt, als des Cirkels Halbmeſſer beträgt, und ein anderer Punct C iſt auſſerhalb der Cirkelfläche, ſo ſchneidet die gerade Linie den Umfang des Cirkels. Eben dieß geſchicht, wenn das Geſagte von den Puncten KF eines andern Cirkels angenommen wird.

§. 371. **Eine unbegränzte gerade Linie theilt die unbegränzte Ebene, in der ſie gezogen iſt, in zween Theile, die an ihren entgegen geſezten Seiten liegen.**

Tab. 2. Fig. 27.

Iſt der Punct F, wodurch eine gerade Linie innerhalb eines Kreiſes geht, der Mittelpunct, ſo

ſo iſt ſie ein Durchmeſſer QP. Iſt es ein anderer Punct O, ſo ziehe man durch ihn den Durchmeſſer QP; der halbe Cirkel, der ſich auf jeder Seite deſſelben befindet, ſchließt mit ihm einen Raum ein, aus welchem das Stück gerade Linie, das ſich auf eben der Seite befindet, nicht heraus kann, ohne ihn zu ſchneiden.

§. 372. Die Auflöſung einer Aufgabe, oder die Conſtruction wird geometriſch genannt, wenn man ſich dabey keines andern Inſtruments, als des Cirkels und Lineals bedient, und aus den Grundſätzen der Geometrie einen richtigen Beweiß davon geben kann. Gebraucht man aber noch andere Inſtrumente dazu, ſo heißt die Conſtruction mechaniſch.

§. 373. **Wenn über einer gegebenen Linie ein gleichſeitiges Dreyeck beſchrieben werden ſoll, ſo verfahre man, wie folgt:**

Man ſetze den Cirkel in A, öfne ihn biß B, und beſchreibe damit über der gegebenen Linie AB einen Bogen; alsdenn ſetze man den Cirkel in B, und beſchreibe mit unveränderter Eröfnung einen andern Bogen, der den erſten in C durchſchneidet. Man ziehe endlich von A und B gerade Linien nach C, ſo hat man das verlangte Dreyeck.

Wenn es einen Durchſchnitt C gibt, ſo iſt AC=AB=BC. Daß es aber einen Durchſchnitt gibt, erhellt ſo: Man verlängere AB, bis BD=AB iſt, ſo geht der Cirkel um B, durch D, einen Punct auſſerhalb des Kreiſes um A, weil AD=2 AB, und auch durch A, einen Punct innerhalb deſſelben, folglich ſchneidet er jenen Kreis.

Tab. 2. Fig. 28.

§. 374. Wenn zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel in einem Dreyeck ſo groß, als in dem andern ſind, ſo iſt alles in beyden Dreyecken gleich, und beyde Dreyecke ſind einander gleich und ähnlich. Tab. 2. Fig. 29.

Geſezt, man habe die beyden Dreyecke ABC und abc, wo AB=ab, AC=ac, und A=a, ſo lege man das Dreyeck abc auf das Dreyeck ABC ſo, daß a auf A, und ab längſt AB fällt; geſchicht diß, ſo fällt b auf B, und ac längſt AC, und c auf C; alſo werden nicht nur BC von bc, B von b, C von c, ſondern auch die ganze Flächen der Dreyecke von einander gedeckt, mithin iſt in beyden Dreyecken alles gleich.

§. 375. Zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel beſtimmen ein Dreyeck.

§. 376. Wenn zwey Dreyecke gleichſchenklicht ſind, oder es ſey AB = AC und ab=ac, ſo kann man abc, auſſer der vorigen Lage, auch noch ſo auf ABC legen, daß a wieder auf A, aber ab längſt AC fällt; alsdenn fällt noch ac längſt AB, und b auf C, c auf B, alſo decken beyde Dreyecke auch einander in dieſer Lage, und es iſt b=C, c=B; wegen der vorigen Bedeckung aber war b=B, c=C, alſo iſt C=B. Tab. 2. Fig. 29.

§. 377. In einem gleichſchenklichten Dreyeck ABC ſind die Winkel an der Grundlinie gleich. Denn man kann ſich eben das Dreyeck noch einmal vorſtellen, abc, und die beyden Bedeckungen betrachten.

§. 378.

§. 378. Wenn in zweyen Dreyecken eine Seite mit den anliegenden Winkeln in einem wie in dem andern iſt, ſo iſt alles übrige gleich, und beyde Dreyecke ſind einander gleich und ähnlich. Tab. 2. Fig. 29.

Es ſey B=b, C=c und BC=bc. Legt man nun b auf B, und bc längſt BC; ſo fällt der Punct c auf C (§. 368.), und ba längſt BA, ca längſt CA es liegt alſo a zugleich in BA und in CA, folglich auf A (§. 369.), und die Dreyecke decken einander, wie vorhin (§. 376.); alſo iſt A=a; BA=ba; AC=ac.

§. 379. Wenn B=C, und b=c, ſo kann man die Dreyecke auch ſo auf einander legen, daß c, B, und b, C, einander decken, und noch fällt a auf A. Alſo iſt nun ca=BA; ba=CA; folglich BA=CA. Tab. 2. Fig. 29.

§. 380. Wenn in einem Dreyeck ABC die beyden Winkel an der Grundlinie B, C, gleich ſind, ſo ſind auch die beyden Seiten BA, CA, gleich. (§. 376. 377.)

§. 381. In einem gleichſeitigen Dreyeck ſind alle drey Winkel gleich, (§. 377.) und wenn in einem Dreyeck alle Winkel gleich ſind, ſo iſt es gleichſeitig. (§. 380.)

§. 382. Ein gleichſeitiges Dreyeck iſt eine regulaire Figur.

§. 383. Wenn in zweyen Dreyecken alle Seiten gleich ſind, ſo iſt alles in beyden Drey-

ecken gleich, und die Dreyecke ſind einander gleich und ähnlich. Tab. 2. Fig. 30. 31. 32.

Es ſey BA = ba; BC — bc; AC = ac. Legt man nun bc dergeſtalt auf BC, daß a und A auf verſchiedene Seiten dieſer Linien fallen, ſo kan man dreyerley Lagen für den Punct a annehmen, 1) in der verlängerten Linie AC; Fig. 30. oder ſo, daß Aa innerhalb des Winkels BAC fällt; Fig. 31. oder ſo, daß Aa auſſerhalb des Winkels BAC fällt; Fig. 32.

In der erſten Lage iſt BA = ba, und A = a §. 377. folglich der Triangel BAC = dem Triangel bac §. 374.

In der zwoten Lage iſt BAC = BAa + aAC, und bac = baA + Aac; da aber BAa = BaA, und aAC = Aac, ſo iſt auch BAC = bac, folglich die Dreyecke wieder gleich.

In der dritten Lage iſt BAC = BAa — CAa, und bac = baA — caA und BAa = baA; und CAa = caA.

§. 384. Aus drey Seiten läßt ſich nur ein Dreyeck machen, ob man ſolchem gleich verſchiedene Stellungen geben kann.

§. 385. In denjenigen Dreyecken, wovon §. 374. 378. 383. gehandelt worden, ſtehen gleiche Seiten gleichen Winkeln, und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber.

§. 386. Wenn man einen gegebenen Winkel halbiren will, ſo ſchneide man auf ſeinen Schenkeln zwey willkührliche Stücke von gleicher Länge ab, und beſchreibe über denſelben ein gleichſeitiges Dreyeck. Tab. 2. Fig. 33.

Der

Der gegebene Winkel heiſſe EAF; auf ſeinen Schenkeln ſchneide man AB = AC, ziehe die Linie BC, und beſchreibe das Dreyeck BDC, ſo wird AD den Winkel halbiren. Da AB = AC, und BD = DC, und AD den Dreyecken ABD, ADC gemein iſt, ſo iſt BAD = DAC = $\frac{1}{2}$ EAF. (§. 383. 385)

§. 387. **Wenn man eine gegebene gerade Linie halbiren will, ſo beſchreibe man ein gleichſeitiges Dreyeck über ihr, und halbire deſſen Winkel. Tab. 2. Fig. 34.**

Die gerade Linie ſey AB, der Winkel ACB, die Linie, die den Winkel in zween gleiche Theile theilt, CE. Dieſe Linie CE geht zwiſchen beyden Schenkeln, und muß alſo irgendwo zwiſchen A und B die Linie AB ſchneiden, welches in bemeldter Figur in E geſchicht. In den Dreyecken ACE und CEB iſt AC = CB, und CE = CE, und ACE = ECB, folglich iſt AE = EB (§. 374.)

Die Halbirung geſchicht, wenn man auf beyden Seiten von AB gleichſeitige Dreyecke beſchreibt, und durch ihre Spitzen die Linie CD zieht. (§. 386.)

§. 394. **Aus einem gegebenen Punct kann auf einer gegebenen Linie ein Perpendikel aufgerichtet werden. Tab. 2. Fig 35.**

Der gegebene Punct ſey C, und die gegebene Linie AB. Man ſetze nun den Cirkel in C, durchſchneide die Linie AB mit beliebiger Eröfnung in M und N, mache alsdenn aus M und N mit einerley Eröfnung des Cirkels einen Durchſchnitt in D, ziehe die Linien MD und ND, und richte endlich zwiſchen beyden Schenkeln des Dreyecks MDN die Linie CD auf.

Weil CM = CN, und DM = DN, und CD = CD, ſo iſt der Triangel MCD dem Triangel NCD gleich und ähnlich, und die Winkel bey C ſind einander gleich, folglich ſteht die Linie CD auf AB perpendicular.

§. 389. **Aus einem gegebenen Puncte kann auf eine gegebene Linie ein Perpendikel gefällt werden. Tab. 3. Fig. 41.**

Der gegebene Punct ſey C, und die gegebene Linie AB. Man ſetze den Cirkel in C, durchſchneide mit gleicher Eröfnung die Linie AB in zween Puncten, nemlich in M und N, und ziehe das Dreyeck MCN, alsdann beſchreibe man über MN ein gleichſeitiges Dreyeck MND, ſo iſt die Linie, die durch D, C, E gezogen wird, der geſuchte Perpendikel; MD = DN, und MC = CN, und CD = CD, folglich der Winkel MDE = NDE; und da MD = DN, und ED = ED, und alſo die Triangel MDE und NDE einander gleich und ähnlich ſind, ſo ſind auch die Nebenwinkel bey E einander gleich, mithin rechte Winkel, und DE auf AB perpendicular.

§. 490. **Zween Nebenwinkel auf einer geraden Linie betragen zuſammen ſo viel, als zween rechte Winkel. Tab. 2. Fig. 36.**

Die beyden Nebenwinkel ſeyen EBD, EBC. Man richte durch B auf CD die Perpendicularlinie BA auf (§. 388.). Wenn von den beyden Nebenwinkeln nicht jeder ein rechter Winkel iſt, ſo muß einer von ihnen ſtumpf, oder ſpitzig ſeyn. Iſt der Winkel EBC ſtumpf, d. i. gröſſer als ein rechter Winkel, ſo muß er ſo viel ſeyn, als ein rechter Winkel und ABE noch darüber, und der Nebenwinkel EBD muß ſo viel ſeyn, als ein rechter Winkel, aber um ABE weniger. Da nun bey dem Winkel EBC um ſo viel mehr, als bey dem Winkel

EBD

EBD weniger iſt, ſo ſind beyde Winkel zuſammen = 2 R. d. i. zween rechten Winkeln gleich. Bey Fig. 36. muß die nach unten gehende Linie BE getilget werden.

§. 391. Alle Winkel, die an einer Spitze oder an einem Punct auf einer Seite einer gegebenen Linie liegen, machen zuſammen zween rechte Winkel. Tab. 2. Fig. 37.

Die Spitze oder Punct ſey H, die gegebene Linie GK. Einige von den Winkeln benannter Figur machen zuſammen den einen rechten Winkel LHK, die übrigen den andern Winkel LHG, und alle Winkel um einen Punct rings herum machen zuſammen vier rechte Winkel.

§. 392. Von zween Nebenwinkeln, deren keiner ein rechter iſt, iſt allezeit einer ſpitzig, der andere ſtumpf.

§. 393. Wenn eine gerade Linie von einer andern durchſchnitten wird, ſo ſind die entgegengeſetzten Winkel, welche man Vertical- oder Scheitelwinkel nennt, einander gleich. Tab. 2. Fig. 38.

Scheitelwinkel ſind gleich, oder ACE=BCD; denn ECB + ACE iſt zween rechten Winkeln gleich, und ECB + BCD iſt auch zween rechten Winkeln gleich, folglich iſt ECB + ACE = ECB + BCD und alſo ACE = BCD.

§. 394. Wenn in einem Dreyeck eine Seite verlängert wird, ſo iſt der äuſſere Winkel gröſſer, als der innere, welcher der verlängerten Seite gegen über ſteht. Tab. 2. Fig. 39.

Die verlängerte Seite ſey BC, der äuſſere Winkel ACD, und der innere Winkel BAC. Man theile nun die Seite AC in dem Punct E in zween gleiche Theile, und ziehe die Linie BE. Dieſe letztere Linie verlängere man bis in F ſo, daß EF = BE werde. Weil nun F über BCD und von AC nach der Seite D zu liegt, ſo iſt ACF kleiner, als ACD; aber in den Dreyecken AEB, und FEC, ſind die eben ſo genannten Winkel gleich, (§. 393.) und EF = BE, EC = AE, alſo iſt BAE = ECF, (§. 379.) und folglich kleiner, als ACD.

§. 395. Wenn man Fig. 39. die Linie AC in CG verlängert, ſo iſt auf die nemliche Art BCG gröſſer, als ABC, aber BCG = ACD (§. 393.) alſo iſt der äuſſere Winkel ACD gröſſer als jeder der beyden innern, ihm entgegengeſetzten Winkeln, von denen nemlich keiner ſein Nebenwinkel ACB iſt.

Man ſetze an die von C abwärts gehende Linie in der Figur den Buchſtaben G.

§. 396. Die Winkel BAC + ACB Fig. 39. ſind kleiner, als ACD + ACB. Dieſe zween letztern (ACD + ACB) betragen ſo viel, als zween rechte Winkel (§. 390.). Die zween erſtern alſo BAC = ACB, ſind kleiner als zween rechte Winkel; eben diß gilt von ABC + ACB, und von BAC + ABC, wenn man BA verlängert.

§. 397. In einem Dreyeck, das einen rechten Winkel hat, ſind die beyden andern ſpitzig, und eben ſo iſt es, wenn es einen ſtumpfen Winkel hat. Hieraus erhellet, wie vielerley Dreyecke, in Abſicht

ſicht auf die Winkel, möglich ſeyen (§. 338. 339. 340.

§. 398. Auf eine gegebene Linie gibt es von einem Punct auſſer ihr (§. 389.) und durch einen Punct in ihr (§. 393.) nur einen einzigen Perpendikel.

§. 399. Wenn Tab. 3. Fig. 41.) MCN ein gleichſchenklichtes Dreyeck, C ſeine Spitze, und E mitten in der Grundlinie MN iſt, ſo halbirt CE den Winkel MCN, und ſteht auf MN ſenkrecht (§. 326. 383.) Die Linie CE iſt ein Perpendikel von C auf MN, (§. 398.) und eben dieſe Linie CE iſt es, die MCN halbirt.

§. 400. In einem Dreyeck ABC ſey AC gröſſer als AB, ſo iſt ABC gröſſer als C, denn man nehme an, daß AD = AB, ſo fällt D zwiſchen A und C, und alſo iſt ABD kleiner, als ABC, da aber ABD = ADB (§. 377.) und ADB gröſſer iſt, als C, ſo muß ABC um ſo vielmehr gröſer ſeyn, als C. Wenn ABC gröſſer iſt, als C, ſo iſt AC gröſſer, als AB; denn wenn beyde Seiten gleich wären, ſo wären auch die Winkel gleich, und wäre AB gröſſer, als AC, ſo wäre ACB gröſſer, als ABC. Tab. 3. Fig. 42.

§. 401. In dem Dreyeck Tab. 3. Fig. 43. nehme man an, daß auf der verlängerten Seite BA, die Seite AD = AC ſey, ſo iſt DCB gröſſer, als DCA, und DCA = D. (§. 377.) Es iſt alſo DB gröſſer, als BC, d. i. CA + AB iſt gröſſer, als CB.

verfährt man auf eben dieſe Weiſe bey C und B, ſo gibt ein ſolches Verfahren einen Beweiß ab, daß AC + CB gröſſer ſey, als AB, und CB + BA gröſſer ſey, als AC, oder daß allemal zwo Seiten eines Dreyecks, welche man will, zuſammen genommen, gröſſer, als die dritte ſind.

§. 402. Von einem gegebenen Punct C iſt die ſenkrechte Linie CA die kürzeſte zu der gegebenen Linie BD. Denn wenn man jede andere Linie CF zieht, ſo iſt der Winkel CFA kleiner, als A (§. 397.), alſo iſt CF gröſſer, als CA (§. 400.)

Tab. 3. Fig. 44.

§. 403. Auf jeder Seite des Perpendikels CA Fig. 44. gibt es nur eine Linie durch C, die mit BD einen gegebenen Winkel macht. Dieſer Winkel ſey CFA, ſo iſt für jeden Punct H zwiſchen F und A der Winkel CHA gröſſer, als CFA, und für jeden Punct G über F hinaus iſt CGA kleiner, als CFA. (§. 394.) Nimmt man aber auf der andern Seite an, daß AM = AF, ſo iſt AMC = CFA. (§. 374.) Wäre ein ſtumpfer Winkel gegeben geweſen, ſo hätte man ſolchen dem Winkel CFB gleich geſetzt (§. 390.).

§. 404. Wenn F weiter von A liegt, als H, Fig. 44. ſo iſt CFH kleiner, als CHA, (§. 394.) und dieſe beyden Winkel ſind ſpitzig, (§. 397.) folglich iſt CHF ſtumpf, (§. 392.) und gröſſer, als CFH. Alſo iſt CF gröſſer, als CH (§. 400.)

§. 405.

§. 405. Wenn Fig. 44. FCA ein gegebener ſpitziger Winkel iſt, ſo kann man durch C Linien ziehen, die mit CA gröſſere oder kleinere Winkel machen, nachdem man G oder H nimmt.

§. 406. **Wenn in zweyen Dreyecken A = a, und C = c, und AB = ab, ſo iſt alles übrige gleich, und die ganze Triangel ſind gleich und ähnlich.** Tab. 2. Fig. 40.

Man laſſe von B, b, die ſenkrechte Linie BD, bd auf die gegebenen Linien AC, ac fallen, und lege das eine Dreyeck auf das andere, ſo, daß a auf A, b auf B, und ac längſt AC fällt, ſo werden die ſenkrechten Linien BD, bd einander decken, und d auf D fallen, und c liegt auf eben der Seite von BD, auf welcher C liegt, weil BCD, bcd allemal ſpitzig ſind. Ja c muß auf C fallen, weil es auf jeder Seite des Perpendikels bd nur eine Linie gibt, die durch B mit AC einen gegebenen Winkel macht, mithin decken die Dreyecke einander (§. 378.) und allemal beſtimmen **zween Winkel** und eine Seite ein Dreyeck.

§. 407. Wenn man an einen gegebenen Punct a einer geraden Linie ac einen Winkel ſetzen will, der einem gegebenen Winkel A gleich iſt, ſo ziehe man Tab. 2. Fig. 40. nach Gefallen durch die Schenkel von A eine Linie BC, um ein Dreyeck ABC zu bekommen, und beſchreibe über ac ein Dreyeck, das eben die Seiten ac = AC, und bc = BC, und ab = AB hat, (§. 383.) denn aus drey Seiten läßt ſich ein einziges Dreyeck zeichnen (§. 229.) ſo wird a = A ſeyn (§. 383.).

§. 408. Wenn zwo Linien AB, und CD von einer dritten ſo geſchnitten werden, daß

I. die beyden innern, entgegengeſetzten Winkel BGH + GHD ſoviel, als zween rechte Winkel betragen, oder

II. der äuſſere Winkel EGB dem innern, entgegengeſetzten Winkel GHD gleich, oder

III. die Wechſelswinkel DGH und HGA einander gleich ſind,

ſo ſind AB und CD gleichlaufende oder parallele Linien. Tab. 3. Fig. 45.

§. 409. Die Beweiſe von §. 408. ſind folgende:

zu I. Wenn die Linien GB und HD nach der Seite B und D von GH zuſammenſtieſſen, ſo gäbe es ein Dreyeck, deſſen Grundlinie GH, und die beyden Seiten GB und HD biß zum Zuſammenſtoßen verlängert wären. Von dieſem Dreyeck wären alſo die beyden Winkel an der Grundlinie zuſammengenommen zween rechten Winkeln gleich; (§. 397.) und weil ferner AGH + HGB zween rechten Winkeln gleich ſind, und CHG + GHD auch zween rechten Winkeln gleich ſind, ſo iſt AGH + HGB + CHG + GHD vier rechten Winkeln gleich. Zieht man nun BGH + GHD, welche angenommener maſſen zween rechten Winkeln gleich ſind, ab, ſo bleiben nur AGH + CHG als zween rechte Winkel übrig. Alſo kann auch nach der Seite A, C, von GH zu, kein Dreyeck von den verlängerten Linien GA und HC gemacht werden.

zu II. Wenn EGB = GHD, ſo iſt HGB zween rechten Winkeln gleich, weniger dem Winkel

kel EGB, und alſo iſt auch HGB zween rechten Winkeln gleich, weniger dem Winkel GHD; oder HGB + GHD iſt zween rechten Winkeln gleich.

zu III. Wenn AGH = GHD, ſo iſt HGB zween rechten Winkeln gleich, weniger dem Winkel AGH; alſo iſt auch HGB zween rechten Winkeln gleich, weniger dem Winkel GHD; oder HGB + GHD iſt zween rechten Winkeln gleich.

§. 410. Wenn man durch einen gegebenen Punct G mit einer gegebenen Linie CD eine Parallellinie ziehen will, ſo ziehe man GH nach Gefallen, und mache HGA = GHD. Tab 3. Fig. 45.

Man kann Parallellinien auf dem Papier ziehen, wenn man an die Linie CD das Lineal legt, den Cirkel in G ſetzt, und ihn biß an das Lineal aufthut, als wenn man einen Bogen beſchreiben wollte, der das Lineal, oder die Linie CD berührte, alsdenn mit dem etwas ſchräg angelegten Cirkel an dem Lineal herunter fährt, ſo wird der andere Fuß des Cirkels durch den Punct G die begehrte Parallellinie beſchreiben. Daß man durch G Linien ziehen kann, die mit CD zuſammenſtoſſen, wenn man nur zu G einen Punct in CD nimmt, iſt gewiß. Man kann ſich alſo vorſtellen, daß AB um G als einen Mittelpunct kreisförmig nach GH gedreht, endlich in Lagen kommt, in denen ſie CD ſchneidet.

§. 411. Wenn zwo gerade Linien, wie GP und CD von einer dritten EF ſo geſchnitten werden, daß die innere, entgegengeſetzten Winkel HGP + GHD kleiner ſind, als zween rechte Winkel, ſo ſtoſſen ſie, verlängert, nach der Seite

von

von EF, wo dieſe Winkel liegen, zuſammen. Tab. 3. Fig. 46.

Was von dieſen Winkeln angenommen wird, iſt ſo viel, als nähme man an, daß der Winkel EGP gröſſer ſey, als der Winkel GHD, oder daß die gerade Linie GP zwiſchen die gleichlaufenden Linien AB und CD (§. 409.) hineinfalle.

§. 412. Durch einen Punct G geht mit einer Linie CD nur eine Linie AB parallel; und wenn eine Linie GP eine von den zwoen Parallellinien, nemlich hier AB, ſchneidet, ſo ſchneidet ſie auch die andere Parallellinie, nemlich hier CD.

§. 413. Jede Linie EF ſchneidet zwo gleichlaufende Linien, ſo, daß es mit den Winkeln die (§. 409.) erwähnte Beſchaffenheit hat. Denn eine der gleichlaufenden Linien ſey CD, ſo hat ſie (§. 412.) durch G nur eine gleichlaufende, nemlich AB, welche gezogen worden.

§. 414. Wäre der Winkel MOB Tab. 3. Fig. 46. kleiner als der Winkel MSD, ſo wäre der Winkel AOS kleiner, als zween rechte Winkel, weniger dem Winkel CSO, (§. 377.) und die Parallellinien BA und DC müſten laut §. 411. nach der Seite A und C zuſammenſtoſſen.

§. 415. Eine Diagonallinie iſt eine gerade Linie, die innerhalb einer geradlinichten Figur von der Spitze des einen in die Spitze des andern Winkels gezogen wird. Tab. 3. Fig. 47.

Z. Ex. In der Figur ABCD iſt die Linie AD eine Diagonallinie.

§. 416.

§. 416. Parallelen AB und CD zwiſchen Parallelen AC und BD ſind gleich. Tab. 3. Fig. 47.

Man ziehe die Diagonallinie AD, ſo iſt der Winkel DAB gleich dem Winkel ADC, und der Winkel ADB iſt gleich dem Winkel DAC, (§. 413.) folglich der Triangel ADB gleich dem Triangel ADC. (§. 378.)

§. 417. Wenn die Linie AB der Linie CD, und die Linie AC der Linie BD gleich iſt, ſo iſt die Linie AB mit CD und die Linie AC mit DB (vermög (§. 400.) parallel, weil der Triangel ABD dem Triangel ACD gleich iſt, (§. 383.) und alſo die Wechſelswinkel an AD gleich ſind. Tab. 3. Fig. 47.

§. 418. Wenn man von den zween willkührlichen Puncten M und O der obern Parallellinie RS die zween Perpendikel MN und OP auf die untere Parallellinie TV fallen läßt, ſo ſind nicht nur bey N und P, ſondern auch bey M und O rechte Winkel, (§. 413.) und die Perpendikel ſind parallel, (§. 409.) folglich gleich. (§. 416.) Tab. 3. Fig. 48.

§. 419. Ein Parallelogramm (§. 417.) wird durch die Diagonallinie AD in zwey gleiche Dreyecke getheilt. Seine gegenüberſtehende Winkel C und B ſind gleich, und die an einer Seite liegenden Winkel DCA + CDB ſind zween rechten Winkeln gleich. Tab. 3. Fig. 47.)

§. 420. Ein Parallelogramm, in welchem ein rechter Winkel iſt, hat lauter rechte Winkel.

§. 421. Wenn man aus beyden verſchiedenen Seiten eines Parallelogramms AC und CD und dem Winkel C, den beyde Seiten einſchlieſſen, ein Parallelogramm zeichnen will, ſo zeichne man erſt das Dreyeck ACD, das dieſe beyden Seiten mit dem Winkel geben, und beſchreibe über AD das Dreyeck ABD, nur ſo, daß AB = CD, und DB = AC ſey. (§. 419.) Tab. 3. Fig. 47.

Wenn die beiden Seiten eines Parallelogramms von verſchiedener Größe ſind, und der Winkel ſchief iſt, ſo kommt eine länglichte Raute (§. 347.) — wenn die Seiten gleich ſind, eine Raute (§. 346.) — wenn ungleiche Seiten in einem rechten Winkel zuſammengeſetzt werden, ein Rechteck (§. 344.) — wenn hier die Seiten gleich ſind, ein Quadrat. (§. 343.)

§. 422. In jedem Dreyeck ABC iſt die Summe aller drey Winkel A + B + BCA zween rechten Winkeln gleich. Tab. 3. Fig. 49.

Man ziehe CE mit AB parallel, (§. 410.) verlängere BC nach D, ſo iſt ACE = A, und ECD = B, (§. 413.) alſo iſt BCA + B + A = BCA + ECD + ECA, und dieſe ſind zween rechten Winkeln gleich. (§. 390.)

§. 423. Weil die Winkel ACD + ACB = A + B + ACB, ſo iſt ACD = A + B. Tab. 3. Fig. 49.

§. 424. Wenn B einem rechten Winkel gleich iſt, ſo iſt BAC + ACB auch einem rechten Winkel gleich;

gleich; oder die beyden ſchiefen Winkel in einem rechtwinklichten Dreyecke betragen zuſammen genommen auch einen rechten Winkel. T 3. Fig. 49.

§. 425. Wenn in vorſtehendem Fall (§. 425.) noch über dieſes BA=BC, ſo iſt BAC = BCA (§. 376. 424.) und einem halben rechten Winkel gleich.

§. 426. In einem gleichſeitigen Dreyecke beträgt jeder Winkel ſo viel, als zwey Drittheile eines rechten Winkels. (§. 376.) Tab. 3. Fig. 49.

§. 427. Wenn in einem gleichſchenklichten Dreyeck ein Winkel gegeben iſt, ſo ſind ſie alle gegeben. Tab. 3. Fig. 49.

Es ſey BA gleich BC, und B ſey gegeben, ſo iſt A + ACB zween rechten Winkeln gleich, weniger dem Winkel B; alſo iſt A gleich ACB und einem rechten Winkel gleich, weniger einem halben Winkel B; oder wenn A = ACB gegeben iſt, ſo iſt der Winkel B zween rechten Winkeln gleich, weniger zween Winkeln A.

§. 428. Die Winkel laſſen ſich nicht nur durch ihre Verhältniß, die ſie zu rechten Winkeln haben, ſondern auch auf andere, willkührliche Arten ausdrücken. Wenn man ſich vorſtellt, daß ein rechter Winkel in 90 gleiche Theile getheilt ſey, daß ein ſolcher Theil ein Grad, und ein Sechzigtheilchen von ihm eine Minute, ein Sechzigtheilchen von der Minute eine Secunde heiſſe, u. ſ. w. ſo kann man die Winkel durch dieſe Theile, die man mit $^{\circ}$ $'$ $''$ Grad, Minut. Secund. bezeichnet, ausdrücken.

Ein rechter Winkel iſt gleich 90; ein halber rechter Winkel = 45°; zwey Drittheile von einem rechten Winkel = 60°. Wendet man das Geſagte auf die (§. 427.) gegebene Winkel an, ſo kommt folgende Rechnung heraus:

$$50^{\circ}\ 12'\ 17'' = B$$

$$\underline{179^{\circ}\ 59'\ 60'' = B + A + ACB}$$

$$129^{\circ}\ 47'\ 43'' = A + ACB.$$

$$64^{\circ}\ 53'\ 51\tfrac{1}{2}'' = A = ACB.$$

§. 429. Wenn man in jeder Figur ABCDEF die Summe aller Winkel finden möchte, ſo ziehe man aus einem willkührlichen Puncte, der innerhalb der Figur iſt, und hier N heißt, nach allen Winkeln der Figur Linien; dadurch bekommt man ſo viel Dreyecke, als die Figur Seiten hat. Von jedem Dreyecke liegen zween Winkel an deſſen Grundlinie, an einer Seite des Vielecks, wie z. E. der Winkel NAB, und ABN in dem Dreyeck ABN, und machen alſo Theile der Winkel des Vielecks aus, wie hier Theile von BAF und ABC. Der dritte Winkel jedes Dreyecks liegt an ſeiner Spitze, und gehört nicht zu den Winkeln des Vielecks, wie hier ANB. Nun machen in jedem Dreyeck alle drey Winkel zuſammen ſo viel, als zween rechte,

(§.

(§. 422.) und in allen Dreyecken machen die Winkel, die rings um den Punct N ſind, zuſammengenommen vier rechte Winkel aus (§. 391.). Man darf alſo nur 180 durch die Zahl der Seiten multipliciren und von dem Product 360 abziehen, ſo bleibt die Summe der Winkel des Vielecks übrig. Oder, es ſei die Summe der Seiten = n, ſo iſt die Summe der Winkel des Vielecks n. 2 R — 4 R = (n — 2). 2 R. (§. 371.) Tab. 3. Fig. 50.

§. 430. **Parallelogramme zwiſchen einerley Parallelen und über einer Grundlinie ſind gleichen Innhalts.** Tab. 3. Fig. 51.

Die Parallelogramme ſeyen ADCB und EBCF; die Parallelen aber AF und BC. Wenn E in der verlängerten Linie AD liegt, ſo müſſen BE und CD einander irgendwo in G zwiſchen den Parallelen ſchneiden. Nun iſt AB = DC und BE = CF und AD = BC und BC = EF, (§. 388.) alſo iſt AE = DF; folglich iſt der Triangel ABE dem Triangel DCF gleich. (§. 383.) und der Triangel ABE — △DEG iſt dem Triangel DCF — △DEG gleich, das iſt, ADGB = EGCF, und endlich ADGB + △BGC = EGCF + △BGC, d. i. ADCB = EBCF.

§. 431. Wenn die Linie E zwiſchen A und D fiele, ſo wäre EF = BC und BC = AD, (§. 343.) alſo wäre AE = DF, und EB = FC, und DC = = AB, und der Triangel AEB wäre dem Triangel DCF (§. 383.) gleich; und addirt man zu einem jeden der beyden eben-genannten Triangeln noch EDCB, ſo iſt ADCB = EFCB. Eben diß gilt noch,

wenn E in D fiele, da nur aus BEDC ein Triangel würde. Tab. 3. Fig. 52.

§. 432. Zwey Parallelogramme, deren Grundlinien und Höhen gleich ſind, ſind auch gleichen Innhalts.

Unter der Höhe verſteht man einen Perpendikel, der auf die Grundlinie von der gegenüberſtehenden Seite gefällt worden iſt, es fallen alſo die beyden Seiten, welche der gemeinſchaftlichen Grundlinie gegenüber ſtehen, in eine Parallele. (§. 418.)

§. 433. Zween Triangel, wie ACD und CDM ſind gleichen Innhalts, wenn ihre Spitzen, A und M, in einer Parallel AM mit der gemeinſchaftlichen Grundlinie liegen. Dann die Parallellinien DB und DE, mit CA und CM gezogen, geben die Parallelogramme ABDC (= zween Triangeln ACD,) und MEDC (= zween Triangeln CMD,) (§. 419.) und dieſe Parallelogramme ſind gleich (§. 430.) und folglich auch die Triangel. Eben diß gilt, wenn die Höhen der Triangel wie Aa und Mm, oder die Perpendikel der Triangel, die von den Spitzen auf die Grundlinie gefällt worden, gleich ſind. Tab. 3. Fig 53.

§. 434. Wenn die Dreyecke CAD und CMD über einer Grundlinie gleichen Innhalt haben, ſo iſt AM mit CD parallel. Tab. 3. Fig. 53.

Iſt AM mit CD nicht parallel, ſo ſind aAM, mMA nicht rechte Winkel; (§. 409.) und doch iſt, weil aA und mM parallel ſind, (§. 409.) aAM

aAM + mMA zween rechten Winkeln gleich, folglich der eine ſpitzig, und der andere ſtumpf. Man nehme nun an, daß der Winkel aAM ſtumpf ſey, und ziehe durch A eine Parallellinie mit CD, (§. 410.) die alſo auf aA ſenkrecht ſteht, und folglich unter AM fällt, und CM zwiſchen C und M in O ſchneidet, ſo haben die Dreyecke COD und CAD einerley Innhalt, weil ſie auf einer Grundlinie zwiſchen Parallelen AO und CD ſtehen, folglich iſt das Dreyeck COD dem Dreyeck CDM gleich, welches doch nicht ſeyn kann, da jenes ein Theil von dieſem iſt. Es kann alſo keine Parallele AO von AM verſchieden ſeyn.

§. 435. Jedes Parallelogramm CDBA iſt noch einmal ſo groß, als jedes Dreyeck CAD, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 436. Will man ein Parallelogramm machen, das einem gegebenen Triangel ABC gleich iſt, ſo halbire man die Grundlinie des Triangels, die BC heißt, in E, und ziehe durch die Puncte E und C Parallelen, in was für einen Winkel mit BC man will, biß an AFG, die durch A mit BC parallel geht, ſo iſt FGCE zween Triangeln AEC gleich (§. 435.), und da der Triangel AEC dem Triangel ABE, der Triangel ABE aber dem halben Triangel ABC gleich iſt, ſo iſt das Parallelogramm FGCE dem Triangel ABC gleich. Tab 3. Fig. 54. Z. B. So kann man ein Dreyeck in ein gleich großes Parallelogramm verwandeln, das einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat — jede geradlinichte Figur in ein Parallelogramm, das eine gegebene Seite und einen ge-

gebenen Winkel hat Tab. 5. Fig. 83. — jede Figur in ein Rechteck, deſſen eine Seite gegeben iſt.

§. 437. In einem rechtwinklichten Dreyeck heiſſen die beyden Seiten, die den rechten Winkel einſchlieſſen, Catheti, und die Seite, die dem rechten Winkel gegen über ſteht, die Hypotenuſe. Tab. 3. Fig. 55.

Das rechtwinklichte Dreyeck ſey BAC, ſo ſind die Seiten AB und AC die Catheti, die Seite BC aber die Hypotenuſe.

§. 438. In einem rechtwinklichten Dreyeck iſt das Quadrat der Hypotenuſe ſo groß, wie die Quadrate der beyden Cathetorum zuſammen genommen. Tab. 3. Fig. 55.

Man mache die Quadrate der Cathetorum, nemlich ABRN und ACEH, und das Quadrat der Hypotenuſe BCMD, ziehe hernach aus dem rechten Winkel eine ſenkrechte Linie auf die Hypotenuſe, und verlängere ſie ſo, daß man die Linie AF, welche mit BD parallel iſt, bekomme, ſo wird das Quadrat der Hypotenuſe BCMD in die zwey länglichten Vierecke oder Rechtecke BGFD und CGFM getheilt. Jedes dieſer eben benannten Rechtecke iſt dem Quadrat derjenigen Seite gleich, nach welcher es zu liegt, nemlich BGFD iſt gleich, ABRN, und CGFM iſt gleich ACEH; denn man ziehe die Linien AD und CR, ſo iſt das Dreyeck BAD gleich dem halben Rechteck BGFD, und das Dreyeck RBC iſt gleich dem halben Quadrat RNAB; (§. 435.) Nun iſt aber die Seite RB gleich der Seite BA, und BC iſt gleich BD, und der Winkel RBG iſt gleich einem rechten Winkel + ABC, und der Winkel ABD iſt ebenfalls gleich einem rechten Winkel + ABC, alſo iſt das Dreyeck

RBC gleich dem Dreyeck BAD, (§. 373.) folglich iſt das Quadrat RNAB gleich dem Rechteck BGFD. Eben ſo iſt das Dreyeck CEB gleich dem halben Quadrat CEHA, und das Dreyeck CMA iſt gleich dem halben Rechteck CGFM; und da CE gleich iſt CA, und CB gleich iſt CM, und ECB gleich iſt ACM, ſo iſt das Dreyeck CMA gleich dem Dreyeck CEB, und das Rechteck CGFM iſt gleich dem Quadrat CEHA. Folglich iſt die Summe der Rechtecke BGFD und CGFM der Summe der Quadrate ABRN und ACEH gleich; oder weil man auch die Quadrate durch die beyden Buchſtaben anzuzeigen pflegt, die an den Endpuncten ihrer Seiten ſtehen, zu denen man noch rechter Hand den Buchſtaben q ſetzt, ſo kann man auch ſagen: BCq iſt gleich ABq + ACq.

§. 439. Vorbenannter Satz, (§. 438.) wird um des groſſen Nutzens willen, den er in der geſammten Mathematik hat, **Magiſter Matheſeos**, oder von ſeinem Erfinder, dem griechiſchen Weltweiſen **Pythagoras**, der **Pythagoriſche Lehrſatz** genannt.

§. 440. Wenn BCq gleich ABq + ACq, ſo iſt BAC einem rechten Winkel gleich. Denn man ziehe auf CA den Perpendikel AD = AB, ſo iſt CDq gleich CAq + ADq, und CAq + BAq iſt gleich CBq; alſo iſt CD gleich CB, und der Triangel CAD iſt gleich dem Triangel CAB, (§. 383.) und CAB iſt gleich CAD, und CAD einem rechten Winkel gleich. Tab. 3. Fig. 56.

§. 441. **Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck die Hypotenuſe und ein Cathetus ſo**

groß, als in einem andern rechtwinklichten Dreyeck, ſo müſſen auch die übri en Stücke in beyden Dreyecken, und die Dreyecke ſelbſt einander gleich ſeyn. Tab. 3. Fig. 57.

In den beyden Dreyecken ARQ und arq iſt die Hypotenuſe AQ gleich der Hypotenuſe aq; und der Cathetus AR iſt gleich dem Catheto ar. Weil nun ARq + RQq gleich iſt ARq, und arq + rqq gleich iſt aqq, (§. 439.) und AQq gleich aqq, ſo iſt auch ARq + RQq gleich arq + rqq; und da ARq gleich arq, ſo iſt auch RQq gleich rqq, und folglich RQ gleich rq, und mithin ſind in beyden Dreyecken alle Seiten einander gleich, und folglich die Dreyecke ſelbſt gleich und ähnlich; (§. 383.) oder mit Zeichen ausgedruckt ſieht das Exempel aus wie folgt:

$$\begin{array}{rlllll} & ARq & + RQq & = AQq & & \\ & arq & + rqq & = aqq & & \\ & AQq & & = aqq & & \\ \text{da nun} & ARq & + RQq & = arq & + rqq \\ \text{und} & ARq & & = arq & & \\ \hline \text{ſo iſt} & RQq & = rqq \text{ u. } RQ & = rq. & & \end{array}$$

§. 442. **Wenn man ein Quadrat machen will, das ſo groß iſt, als zwey oder mehrere andere zuſammen genommen**, ſo ſetze man die Seiten der beyden Quadrate AB und BC rechtwinklicht zuſammen, und ziehe die Linie AC, ſo hat man die Seite des Quadrats, welches ſo groß iſt, als die andern beyde (1, 2) zuſammen; und wenn man CA = AC auf die Seite des dritten Quadrates CD perpendicular aufrichtet, und

die

die Linie DE zieht, ſo hat man die Seite eines Quadrats, das ſo groß iſt, als die drey Quadrate (1, 2, 3,) zuſammen. Tab. 3. Fig. 58.

Auf eine ſolche Weiſe kann man ein Quadrat machen, das ſo groß iſt, als 4 oder 5 oder 6 oder noch mehr gegebene Quadrate.

§. 443. Wenn eine Linie einen Kreis in zween Puncten ſchneidet, ſo iſt jeder Punct von ihr, der zwiſchen die zween Puncte fällt, näher bei dem Mittelpunct, als der Halbmeſſer beträgt, und jeder Punct auſſer den zween Puncten iſt weiter davon.

§. 444. Eine gerade Linie ſchneidet einen Kreis entweder in zween Puncten, oder ſie berührt ihn in einem, oder ſie trift gar nicht an ſeinem Umfang an, und alle ihre Puncte ſind auſſer ihm.

§. 445. Ein Perpendikel EF, der aus eines Cirkels Mittelpunct E auf die Sehne AB gefällt worden, halbirt ſie in F. Tab. 3. Fig. 59.

§. 446. Eine Linie, die aus dem Mittelpunct E gezogen, die Sehne halbirt, ſteht auf ihr ſenkrecht. Tab. 3. Fig. 59.

§. 447. Eine Linie, die durch die Mitte einer Sehne ſenkrecht gezogen wird, geht durch den Mittelpunct. Tab. 3. Fig. 59.

Weil EA = EB, ſo folgt §. 445. 446. aus den Gründen, welche §. 400. angeführt worden; und weil nach §. 445. der Perpendikel EF, welchen man aus dem Mittelpunct des Kreiſes herunter fallen läßt, auf die Mitte F der Sehne AB zu ſte-

hen kommt, ſo muß auch der Perpendikel, welcher aus dieſer Mitte F aufgerichtet wird, durch des Kreiſes Mittelpunct E gehen, weil auf einem Punct nur einerley Perpendikel ſtehen können. (§. 388.) Hieraus erhellt alſo §. 445.

§. 448. Wenn man durch drey gegebene Puncte A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel beſchreiben will, ſo ziehe man mitten durch die gegebenen Sehnen AB und BC die Perpendikel MN und PQ. (§. 387.) Weil der Mittelpunct in jedem liegt, ſo liegt er in ihrem einzigen Durchſchnitt O, und der Halbmeſſer, womit man den Cirkel beſchreiben kann, iſt alſo OA = OB = OC. Daß die Linien MN und PQ irgendwo zuſammenſtoſſen werden, wenn die Puncte A, B und C nicht in einer geraden Linie liegen, läßt ſich aus folgendem erklären: Ein Perpendikel von V auf BA gefällt iſt mit der Linie MN parallel. Sind nun die Linien BC und AB nicht gerade Linien, ſo ſteht die Linie PQ nicht auf der Linie AB ſenkrecht, weil es ſonſten zwo Linien durch den Punct B gäbe, welche beide auf der Linie PQ ſenkrecht ſtünden, nemlich BC und die verlängerte AB; alſo iſt die Linie PQ von dem Perpendikel aus V, welcher auf BA gefällt worden, unterſchieden, folglich mit MN nicht gleichlaufend. Dieſer Satz von dem Zuſammenſtoſſen der Perpendikel gilt, wenn auch die Puncte T und V nicht mitten in den Linien AB und BC liegen, das heißt: zween Perpendikel auf zwo Linien, die weder eine ausmachen, noch

noch gleichlaufend, ſtoſſen allemal zuſammen. Aber wenn die Puncte A, B und C in einer Linie lågen, ſo wåren die Linien MN und PQ gleichlaufend, nemlich: **durch drei Puncte einer Linie geht kein Kreis. Tab. 3. Fig. 60.**

§. 449. Drei Puncte beſtimmen einen einzigen Kreis, wie zween eine gerade Linie; doch wird der Kreis zugleich der Gröſſe nach beſtimmt, die gerade Linie zuweilen nur der Lage nach. Die drei Puncte geben zugleich den Mittelpunct und den Halbmeſſer, und alſo können zween verſchiedene Kreiſe einander nicht in mehr als zween Puncten ſchneiden.

§. 450. **Wenn die Sehnen NM und FG vom Mittelpunct E gleichweit entfernt ſind, ſo ſind ſie gleich. Tab. 4. Fig. 66.**

Die Entfernungen EH und EO halbiren die Sehnen, alſo iſt FH = 1/2 FG, und MO = 1/2 MN. Weil nun EF = EN, ſo iſt FEq — EHq = EMq — EOq; oder THq = MOq; alſo FH = MO, und FG = MM.

Wo das kleine q ſteht, ſpricht man: das Quadrat von FE weniger dem Quadrat von EH iſt gleich dem Quadrat von EM weniger dem Quadrat von EO u. ſ. w.

§. 451. **Wenn die Sehnen gleich ſind, ſo ſind ſie gleich entfernt. Tab. 4. Fig. 66.**

FEq — FHq = EMq — MOq, oder EHq = EOq.

§. 452. **Die entferntere Sehne iſt kleiner. Tab. 4. Fig. 66.**

Wenn

Wenn EO > EH, ſo iſt das EMq — EO < EFq — EHq; oder MO > EH.

§. 453. **Die kleinere Sehne iſt entfernter.** Tab. 4. Fig. 66.

Wenn MO < FH, ſo iſt MEq — MOq > EFq — FHq; oder EO < EH.

§. 454. Ein Perpendikel AH, welcher auf den Halbmeſſer BG durch ſein Ende G gefällt worden, hat alle ſeine übrigen Puncte auſſerhalb dem Kreiſe. Jede andere Linie durch G aber ſchneidet den Kreis in zween Puncten. Tab. 7. Fig. 109.

Nimmt man AG nach Gefallen in AH, ſo iſt BAG < BGA; alſo iſt BA > BG > BC. Weil GI ſchiefe Winkel mit BG macht, und es doch auf ſie aus B einen Perpendikel gibt, ſo ſei ſolcher die Linie BE, ſo iſt BGE kleiner als BEG, alſo iſt BE kleiner als BG, kleiner als BI, alſo iſt ein Punct von GK, nemlich E innerhalb des Kreiſes und GK ſchneidet den Kreis noch einmal. Man nehme EM = EA, ſo iſt das Dreieck BGI gleich dem Dreieck BEG, alſo iſt BI = BG, und I der zweite Durchſchnittspunct, auſſer welchem und G es keinen gibt, daß alſo das Stück GEI ganz innerhalb des Kreiſes fällt.

§. 455. Ein Perpendikel durch das Ende eines Halbmeſſers, iſt eine Tangente. Man zieht alſo durch jeden Punct im Umfang des Kreiſes G eine Tangente, wenn man dahin einen Halbmeſſer BG zieht, und auf ſolchen durch G einen Perpendikel AH ſetzt. Tab. 7. Fig. 109.

§. 456. Durch ein G geht nur eine Tangente, und jede Taugente ſteht auf dem Halbmeſſer am Berührungspuncte ſenkrecht.

§. 457. Ein Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunct geht durch den Mittelpunct. Tab. 7. Fig. 109.

§. 458. Sehnen, die man mit der Tangente AH parallel, alſo auf BG ſenkrecht zöge, würden immer kleiner und kleiner werden, je näher ſie von B nach G rückten, das iſt, ihre Durchſchnitte mit dem Kreiſe würden immer näher und näher zuſammen rücken und endlich in G in einen Punct zuſammengehen. Alſo kann man die Tangente als die letzte dieſer Sehnen, und den Berührungspunct als zween zuſammengegangene Durchſchnittspuncte anſehen. Tab. 7. Fig. 109.

§. 459. Will man aus einem gegebenen Punct eine Tangente an den Kreis ziehen, ſo ſei die Tangente, die man ſucht, = KM, und BMK iſt einem rechten Winkel gleich. Man ziehe an A die Tangente AD, welcher BM, in D verlängert, begegne, ſo haben die Dreiecke ABD, und MBK den Winkel B gemein, BAD und BMK ſind einander gleich, wie BA = BM, alſo auch BK = BD. Hieraus fließt folgende Auflöſung: durch K und den Mittelpunct B ziehe man KB. An A, wo die Linie KB in den Kreis ſchneidet, ziehe man eine Tangente, die man mit BD = KB durchſchneide, ſo

kann

kann man DB ziehen, welche den Kreis in dem geſuchten Berührungspuncte M ſchneiden, und KM wird die Tangente ſeyn. Man kann auch Ad = AD nehmen, und eine zweite Tangente Km ziehen. Tab. 7. Fig. 110.

§. 460. Alle Puncte des Bogens GFI, G und I ausgenommen, fallen zwiſchen GK und GH, man kann alſo ſagen: der Winkel, den der Bogen IFG mit der Tangente macht, ſei kleiner, als jeder geradlinichte Winkel KGH, und der Winkel des Bogens IFG mit dem Halbmeſſer BG ſei gröſſer als jeder geradlinichte ſpitzige Winkel KGB, nemlich KGB kann einem rechten Winkel ſo nahe kommen, und KGH ſo klein werden, als man nur will, und der Bogen fällt doch allemal ganz zwiſchen KG und GH. Tab. 7. Fig. 109.

§. 461. Kreiſe, die aus einem Mittelpunct mit verſchiedenen Halbmeſſern beſchrieben ſind, haben keinen Punct miteinander gemein, und heiſſen concentriſche Kreiſe.

Jeder Punct des einen iſt von K um die Länge KP, und jeder Punct des andern um die Länge KQ entfernt. Hätten ſie einen Punct gemein, ſo wäre dieſes ein Punct beider Kreiſe, der nicht zugleich zwo verſchiedene Entfernungen von einerlei Puncte K haben kann. Tab. 4. Fig. 61.

§. 462. Kreiſe, die einander ſchneiden, haben nicht einerlei Mittelpunct, aber eine gemeinſchaftliche Sehne durch die Durchſchnittspuncte, wie LM,

LM, und wenn man durch das Mittel dieſer Sehne einen Perpendikel auf ſie ſetzt, ſo geht ſolcher durch beider Kreiſe Mittelpuncte. Tab. 2. Fig. 26. (§. 445 — 447.) Die Mittelpuncte können aber auf verſchiedenen Seiten der Sehne liegen, wie Tab. 2. Fig. 26. oder auf einer Seite, wie Tab. 7. Fig. 111. Im letzten Fall ſei AB die Tangente des Kreiſes um H, und AC die Tangente des Kreiſes um I; die letztere muß wegen des ſtumpfen Winkels BAI, und des ſpitzigen Winkels IAG zwiſchen AB und AF fallen, und der Bogen ihres Kreiſes, nemlich AEF fällt alſo bei A zwiſchen ſie und AF, folglich zwiſchen AF und den Bogen AKF des andern Kreiſes, weil AKF zwiſchen AB und AC fällt. Eben ſo erhellt, daß bei F der Bogen FEA zwiſchen AF und den Bogen FKA fallen muß, und alſo liegt der ganze Bogen AEF zwiſchen AF und dem Bogen AKF, wenn aber Hk=HA, und In=IA, ſo liegt der ganze Bogen AkF zwiſchen AF und dem Bogen AnF. Nun iſt IA gröſſer als HA; von den Bogen alſo, die auf der Seite der gemeinſchaftlichen Sehne liegen, auf welcher die Mittelpuncte nicht liegen, erhebt ſich der Bogen des gröſten Kreiſes am wenigſten über die Sehne, d. i. er iſt flächer. Tab. 7. Fig. 111.

§. 463. Aus jedem Punct I des Perpendikels DGn läßt ſich ein Kreis durch A und F beſchreiben, weil allemal IA=IF; und auſſer den Puncten A,

F,

F, kann noch nach Gefallen ein Punct E in den Perpendikel gegeben ſeyn, weil dieſes ſchon durch die Mittelpuncte aller Kreiſe durch A und F geht, und alſo der Punct E nur die Lage des Mittelpuncts im Perpendikel beſtimmt. Da man alſo E, ſo nahe man will, bei AF nehmen kann, ſo laſſen ſich Kreiſe beſchreiben, deren Bogen AEF ſich immer weniger und weniger über AF erheben, immer flächer und flächer werden, oder der Sehne immer näher und näher kommen. Weil dieſes ohne Ende fortgeht, und immer gröſſere Halbmeſſer erfordert, ſo kann man ſagen: der letzte unter ihnen, ein unendlicher Halbmeſſer, der nemlich gröſser iſt, als jede gegebene Länge, ſei die Sehne AF ſelbſt. Tab. 7. Fig. 111.

Man beſchreibe um den Mittelpunct E mit EC einen Kreis, deſſen Durchmeſſer CI iſt. Man nehme einen Punct H auſſerhalb der Linie CE, und beſchreibe um denſelben einen Kreis mit HC, welcher den vorigen noch anderswo als in C ſchneiden wird, denn man lege ein Dreieck EHh, das Hh gleich HC, und Eh gleich EC unter EH hat, ſo iſt h in einem Kreiſe um H mit HC, und in einem Kreiſe um E mit EC, alſo der zweite Durchſchnitt der beiden genannten Kreiſe. Sollen alſo ein Paar Kreiſe nur einen Punct C mit einander gemein haben, einander nicht ſchneiden, ſondern nur berühren, ſo müſſen ihre Mittelpuncte E und g mit C in einer geraden Linie liegen. Tab. 7. Fig 112.

§. 465.

§. 465. Will man durch einen gegebenen Punct C zween Kreiſe beſchreiben, die nur ihn gemein haben, ſo nehme man E und g für ihre Mittelpuncte, wie man will, an, nur daß durch alle drei Puncte eine gerade Linie geht; Kreiſe um E und g mit EC und gC werden das verlangte thun. Tab. 7. Fig. 113.

Ein Perpendikel AB durch C auf die gerade Linie durch E, g, C berührt beide Kreiſe. Liegen nun E und g auf verſchiedenen Seiten von C Fig. 112, oder von AB Fig. 113, ſo haben die Kreiſe keinen Punct als C gemein, weil jeder ganz auf ſeiner Seite der Tangente liegt. Befinden ſich aber E und g auf einer Seite von C Fig. 112, ſo ſei Cg gröſſer als CE, und M im Kreiſe um g, man ziehe gM, EM und MC, ſo iſt gMC = gCM, und weil E zwiſchen g und C fällt, ſo iſt EMC kleiner als gMC, alſo alſo kleiner, als gCM, iſt EM gröſſer, als EC; oder, von dem Kreiſe um g iſt jeder andere Punct als C auſſer dem um E.

§. 466. Kreiſe, die einander berühren, haben an einer gemeinſchaftlichen Tangente einen gemeinſchaftlichen Berührungspu Kreiſe, die einen gemeinſchaftlichen Berührungspunct haben, berühren einander, weil ihre Mittelpuncte in dem Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunct liegen. Zween Kreiſe, die durch einen Punct gehen, aber daſelbſt nicht einerlei Tangente haben, ſchneiden einander auſſer dieſem Puncte noch anderswo (§. 464.), denn jeder Mittelpunct liegt in einem Perpendikel auf ſeine Tangente durch

den gemeinſchaftlichen Punct, und dieſe Perpendikel müſſen verſchieden ſeyn, alſo können nicht beide Mittelpuncte mit dem gemeinſchaftlichen Puncte in einer geraden Linie liegen.

§. 467. Wenn ein Kreis, der um E gezogen wird, CA zur Tangente hat, und man, in der verlängerten Cg, g weiter als E von C nimmt, ſo geht der Kreis mit gC zwiſchen vorigen und der gemeinſchaftlichen Tangente hin; der Winkel eines Kreiſes mit ſeiner Tangente wird alſo kleiner, wenn der Halbmeſſer größer wird. Dieſer Berührungswinkel, der kleiner, als jeder geradlinichte iſt, kann alſo nicht völlig Nichts ſeyn, ſonſt wäre unbegreiflich, wie er bei dem Kreiſe um g kleiner ſeyn könnte, als bei dem Kreiſe um E. Tab. 7. Fig. 112.

§. 468. Der größere Kreis (§. 467.) entfernt ſich alſo langſamer von ſeiner Tangente, als der kleinere, daher kann man ſagen, er habe weniger Krümmung.

§. 469. Schiebt man den Mittelpunct H des kleinern Kreiſes auf den Perpendikel En nach I zu, ſo werden ſeine beiden Durchſchnitte mit dem größern A und F immer näher und näher zuſammenrücken, und endlich in E in einen Punct fallen, in welchem nun beide Kreiſe einander berühren. Der Berührungspunct zweener Kreiſe iſt alſo als die Vereinigung zweener Durchſchnittspuncte anzuſehen.

So

So iſt alſo der Satz:

„Zween Kreiſe berühren einander nur in „einem Puncte" (§. 464.)

ein beſonderer Fall des Satzes:

„Zween Kreiſe ſchneiden einander nur in „zween Puncten (§. 458).

§. 470. **Der Winkel an dem Mittelpunct** eines Kreiſes iſt derjenige, deſſen Spitze an den Mittelpunct, und deſſen beyden Schenkel an die Peripherie deſſelben ſtoſſen, wie der Winkel BDC. Tab. 4. Fig. 62.

§. 471. **Der Winkel an der Peripherie** eines Kreiſes iſt derienige, deſſen Spitze ſowohl, als die beyden Schenkel an die Peripherie deſſelben Cirkels ſtoſſen, wie der Winkel ABC. Tab. 4. Fig. 62.

§. 473. **Der Winkel an dem Mittelpunct iſt noch einmal ſo groß, als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einerley Bogen ſteht.** Der Winkel am Mittelpunct §. 470. ſey BDC, und der Winkel an der Peripherie §. 471. ſey BAC. Tab. 4. Fig. 62. 63. 64.

Es gibt drey Fälle, in welchen die Lage dieſer Winkel gegen einander betrachtet werden kann:

I. Fall. Der Winkel BDC iſt gleich A + C, und A + C iſt gleich zweyen A. Fig. 62.

II. Fall. Der Winkel FDB + BDC iſt gleich zweyen EAB + 2 BAC, und EDB iſt gleich zweyen EAB, deswegen iſt BDC gleich zweyen BAC. Fig. 63.

III. Fall. Der Winkel EDC iſt gleich zweyen EAC und EDB iſt gleich zweyen EAB, alſo iſt EDC + EDB gleich zweyen EAC plus zweyen EAB; oder BDC iſt gleich zweyen BAC. Fig. 64.

§. 473. **Der Winkel im halben Kreis** KPL iſt ein rechter Winkel, dann man ziehe durch den Mittelpunkt F die Linie PFG, ſo iſt GPL gleich dem halben GFL; und GPK gleich dem halben GFK; alſo iſt GPL + GPK gleich dem halben GFL und dem halben GFK, und mithin der Helfte von zween rechten Winkeln gleich. (§. 390.) Tab. 4. Fig. 65. Der Winkel MPL im kleinern Abſchnitt iſt ſtumpf, NPL ſpitzig. Man ziehe durch L den Halbmeſſer LK, ſo iſt KPL gleich einem rechten, alſo MPL gröſer als ein rechter und NPL kleiner, als ein rechter Winkel an verſchiedenen Puncten eines Abſchnittes ſind gleich, denn ſie gehören zu einerley Winkel am Mittelpunct.

§. 474. Wenn in einem Kreis **die Winkel am Mittelpunct** NEM und FEG einander gleich ſind, ſo ſind die **Bogen** NLM und FIG zwiſchen ihren Schenkeln gleich. Tab. 4. Fig. 66.

Die Gleichheit der Winkel macht, daß die Sehne NM der Sehne FG gleich iſt. (§. 379) Man lege alſo die Sehne NM mit ihrem Bogen NLM auf die Sehne FG, ſo, daß N auf F, M auf G fällt, ſo muß jeder Punct des Bogens NLM auf einen Punct des Bogens FIG fallen, weil beyder Bogen Puncte von E gleichweit abſtehen; alſo decken beide **Bogen** einander.

§. 475.

§. 475. Wenn in einem Kreis die Bogen MG und NF gleich ſind, ſo ſind auch die Winkel NEF und MEG gleich, zwiſchen deren Schenkel dieſe Bogen fallen. Tab. 4. Fig. 66.

Wenn der Bogen NF dem Bogen MG gleich iſt, wie hier angenommen wird, ſo müſſen ſie einander decken, und mithin muß N auf M und F auf G zu liegen kommen, und die Sehne, die zwiſchen N und F gezogen wird, muß der Sehne zwiſchen M und G gleich ſeyn; folglich iſt der Triangel NEF dem Triangel MEG gleich und ähnlich, und alſo auch der Winkel NEF dem Winkel MEG gleich. (§. 383.)

§. 476. Gleiche Sehnen eines Cirkels haben gleiche Bogen, und gleiche Bogen haben gleiche Sehnen. Tab. 4. Fig. 66.

Wenn die Sehne NM der Sehne FG gleich iſt, ſo iſt auch der Bogen NLM den Bogen GIF gleich, und NIM iſt FLG gleich. Alles diß gilt auch bey zween Cirkeln, deren Halbmeſſer gleich ſind.

§. 477. Der Perpendikel EF halbirt auch den Bogen AIB in I. Tab. 3. Fig. 59.

§. 479. Sind die Bogen DF: DG in der Rationalverhältniß p: q, ſo muß ein kleiner Bogen DE p mal in dem einen, und q mal im andern enthalten ſeyn. Zu dieſem kleinen Bogen gehört der Winkel EKD, und ſoviel Bogen wie DE auf DF oder DG gehen, ſo viel Winkel wie EKD gehen auf den Winkel FKD oder GKD. Alſo verhält ſich FKD zu GKD, oder p. EKD verhält ſich zu q.

 EKD,

EKD, wie ſich p zu q verhält; oder die Winkel verhalten ſich wie die ihnen zugehörigen Bogen. Wenn alſo die Winkel oder die Bogen eine Rationalverhältniß haben, ſo verhalten ſich allemal die Winkel wie die Bogen. Tab. 4. Fig. 67.

§. 480. Man theile einen Cirkel in vier gleiche Bogen, ſo heißt jeder derſelben ein Quadrant.

§. 481. Wird der Quadrant DL in 90 Theile getheilt, daß alſo der ganze Umfang 360 Theile bekommt, ſo kann man die Winkel, die mit ihrer Spitze am Mittelpunct des Cirkels ſtehen, durch die Bogen beſtimmen, die zwiſchen ihre Schenkel fallen. Tab. 4. Fig. 67.

Wenn z. E. DF 50 ſolcher Theile hielte, ſo beſtünde FKD aus 50 ſolchen Winkeln, dergleichen 90 einen rechten Winkel ausmachen, und 360 den Raum um K rings herum ausfüllen. Es iſt alſo einerley, ob man EKD einen Grad nennen will, (§. 428), oder ob man ED = $\frac{1}{360}$. DGHID einen Grad heißt, da alsdann FKD als ein Winkel vorausgeſetzt wird, der dem Bogen von einem Grade zugehört. Die Benennung der Grade wird eigentlich den Theilen des Kreiſes beygelegt. Man kann ſie aber auch auf dieſe Art von Winkeln gebrauchen. FKD gleich 50 Graden heißt ſoviel, als FKD gleich 50 EKD, wenn ED gleich 1 Grad.

§. 482. Weil alle Cirkel, groſſe wie kleine, einerley Zahl von Graden, nemlich 360 halten, ſo iſt es gleichgültig, ob man mit einer groſſen oder kleinen Eröfnung des Cirkels einen Winkel mißt; die Anzahl der Grade iſt beyderſeits einerley, nur

ſind

ſind die einzelnen Grade im erſten Fall gröſſer, und im andern Fall kleiner, denn man begehrt nicht zu wiſſen, wie groß der Bogen ſey, wenn er in eine gerade Linie ausgedehnt würde, ſondern wieviel er Grade halte, oder wie groß die Neigung des Winkels ſey. Es wird alſo keine gewiſſe Gröſſe des Halbmeſſers vorausgeſezt.

§. 483. Die gewöhnliche Art, **Winkel zu meſſen**, beſteht darinn, daß man an ihre Spitze den Mittelpunct eines Kreiſes legt, der in Grade getheilt iſt, und zählt, wieviel zwiſchen die Schenkel fallen.

Der Halbmeſſer iſt, wie (§. 482.) geſagt, willkührlich. So heißt ein Bogen wie FD das Maas des Winkels FKD, weil der Bogen, oder eigentlich die Menge von Graden, die auf ihn gehen, ſich verhält, wie die Menge von Winkeln EKD, die auf FKD gehen. Tab. 4 Fig. 67.

§. 484. Das Maas eines Winkels am Umkreiſe NPL und MPL (§. 472. 474.) iſt die Helfte des Bogens NL und ML, auf dem er ſteht. Und wenn zween Winkel, wie MPL und MOL auf Bogen ſtehen, die zuſammen den Umkreis machen, ſo machen ihre Maaſe zuſammen den halben Umkreis; alſo iſt MPL + MOL gleich zween rechten Winkeln. Läßt ſich ein Winkel nicht durch Grade meſſen, ſo kann man Minuten, Secunden u. ſ. w. dazu nehmen. Tab. 4. Fig. 65.

§. 485. Ein Kreis ſei in lauter gleiche Bogen AB = BC = CD = DE = EF = FA an der Zahl n ge-

getheilt, will man nun die Winkel D, E, C, u. ſ. w. wiſſen, welche die Sehnen miteinander machen, ſo erfährt man ſie aus folgender Auflöſung.

Weil die Bogen EF = ED = $\frac{1}{n}$. 360°, ſo ſteht der Winkel E auf dem Bogen FABCD auf, der 360 — $\frac{2.\ 360}{n}$ Grade hat. Alſo iſt der Winkel E = 180° — $\frac{360°}{n}$. Da nun auch die Bogen EF = FA, und ED = CD u. ſ. w. ſo ſind der Sehnen Winkel an der Peripherie alle gleich, und alſo gleich E. Die Sehnen ſelbſt aber ſind auch gleich. Wenn man alſo den Umfang eines Kreiſes in n gleiche Theile theilen kann, ſo kann man dadurch in ihm ein ordentliches Vieleck von n Seiten oder Winkeln beſchreiben, deſſen Polygonwinkel hier eben ſo gefunden wird, wie oben §. 429. Tab. 4. Fig. 68.

§. 486. Die Halbmeſſer theilen das regulaire Polygon, das in den Kreis beſchrieben iſt, in lauter gleiche Dreiecke. Tab. 4. Fig. 68.

§. 487. Der Winkel am Mittelpunct, AKB = BKC iſt = $\frac{1.}{n}$ 360°.

Eine Tafel für die Polygon- und Centriwinkel läßt ſich leicht verfertigen, wenn man nach und nach n = 3, = 4, = 5 u. ſ. w. ſetzt. Der Nutzen dieſer Tafel iſt in der practiſchen Geometrie und Befeſtigungskunſt ſichtbar. Tab. 4. Fig. 68.

§. 488. Wenn das Vieleck ABCDEF ein ordentliches iſt, ſo läßt ſich ein Kreis durch alle Spitzen ſeiner Polygonwinkel beſchreiben. Man hal-

halbire zween Winkel FAB und CBA; weil nun jeder Polygonwinkel kleiner iſt, als zween rechte Winkel, ſo iſt die Helfte eines jeden kleiner, als ein rechter Winkel, alſo iſt die Summe beider kleiner als zween rechte Winkel, alſo ſtoſſen die halbirenden Linien irgendwo in K zuſammen, daß AK gleich BK wird. Zieht man nun KC, ſo iſt das Dreieck KBC gleich dem Dreieck KBA, und KC=KA, und KCB=KBC= dem halben Polygonwinkel, und ſo von K aus nach allen Ecken des Polygonwinkels gleich weit. Tab. 4. Fig 68.

§. 489. Wenn die Sehne AB dem Halbmeſſer BK gleich iſt, ſo iſt der Triangel ABK ein gleichſeitiger Triangel, worinn alſo auch alle 3 Winkel einander gleich ſind; (§. 381.) alle 3 Winkel aber ſind in einem Triangel zween rechten Winkeln, oder 180 Graden gleich, (§. 422.) mithin hat der Winkel AKB 60 Grade, (§. 426.) und alſo hat auch der Bogen AB 60 Grade, welche ſoviel, als den ſechſten Theil von 360 Graden betragen. Der Halbmeſſer iſt folglich die Sehne des 6ten Theils vom Umkreis. Tab. 4. Fig. 68.

§. 490. Wenn man in einen gegebenen Cirkel ein ordentliches Sechseck beſchreiben will, ſo darf man nur darinnen den Halbmeſſer ſechsmal herumtragen. Tab. 4. Fig. 68.

§. 491. Wenn man auf eine gegebene Linie DC ein Sechseck beſchreiben will, ſo darf man

nur über ihr ein gleichſeitiges Dreyeck DKC beſchreiben, diß gibt K, und den Kreis um K mit 150 KD, und das Sechseck. §. 490. T. 4. Fig. 68.

§. 492. Wenn man über einer gegebenen Linie DC ein ordentliches Vieleck beſchreiben will, ſo trage man an dieſe Linie DC die halben Polygonwinkel in D und C, und zeichne auf dieſe Weiſe einen gleichſchenklichten Triangel, §. 429. ſo gibt ſich deſſen Spitze K, aus welcher der Kreis mit KD beſchrieben werden kann, in welchem man alſo nur die gegebene Seite DC herumtragen darf. Dieſes Verfahren dient im Kleinen, ſich Begriffe von den Polygonen zu machen, und bahnt den Weg zu Vorſchriften, die ſich aber erſt in der Trigonometrie erklären laſſen. Das Polygon wird durch Durchmeſſer, die zugleich Diagonalen ſind, in ähnliche Helften getheilt. Tab. 4. Fig. 68.

§. 493. Alle Höhen der Dreyecke, in welchen das Vieleck aus dem Mittelpunct getheilt wird, wie KQ iſt, ſind gleich. (§. 474. 475.) Man richte alſo auf einer unbeſtimmten geraden Linie den Perpendikel ak = KQ auf, und mache ab = bc = cd = de = ef = fg, jedes einer Seite des Vielecks gleich, ſo haben die Dreyecke akb, bkc, ckd, dke, ekf, fkg alle einerley Innhalt, (§. 432.) jedes iſt nemlich dem Dreyeck AKB gleich, und alſo iſt die Summe aller Dreyecke, deren jedes AKB gleich iſt, d. i. das Vieleck ABCDEF ſo groß, als die Summe aller Dreyecke der 69ſten Figur, d. i.

als

als △ kag, oder als ein Dreyeck, deſſen Höhe = KQ, und deſſen Grundlinie der Umfang dieſes Vielecks iſt. Tab. 4. Fig. 68. 69.

§. 494. **Dreyecke von gleicher Höhe verhalten ſich wie ihre Grundlinien.** Tab. 4. Fig. 70.

Die Dreyecke ſeyen BAC und CED, die Grundlinien aber BC und CD. Bb ſey gleich Dd, und beyde ſeyen eine Länge, mit welcher ſich BC und CD genau meſſen laſſen, alſo, daß BC gleich m ⋊ Bb, und CD gleich n ⋊ Dd, wo m und n ganze Zahlen bedeuten. Nun iſt das Dreyeck BAb dem Dreyeck DEd gleich, (§. 433.) und aus eben dem Grunde iſt das Dreyeck BAC gleich m ⋊ △ BAb, und das Dreyeck CED iſt gleich n ⋊ △ DEd, mithin verhält ſich das Dreyeck BAC zum Dreyeck CED, wie m zu n, und m verhält ſich zu n, wie BC zu CD.

Zu mehrerer Erläuterung dieſes Beweiſes nehme man in vorliegendem Fall an, daß ſich BC und CD genau durch Zolle ausmeſſen lieſſen, und daß z. E. Bb = Dd 1 Zoll wäre. Wenn nun die Grundlinie BC 4 Zoll mäſſe, ſo wäre ſie gleich 4 ⋊ Bb, und wenn die Länge von CD 6 Zolle in ſich enthielte, ſo wäre ſie gleich 6 ⋊ Dd; es würde alſo in benanntem Fall durch den unbeſtimmten Buchſtaben m die Zahl 4, und durch n die Zahl 6 angedeutet worden ſeyn, und das Dreyeck BAC verhielte ſich demnach zum Dreyeck CED, wie 4 zu 6, oder wie BC zu CD.

§. 495. **Wenn in dem Dreyeck ABC die Linie DE mit der Grundlinie BC gleichlaufend iſt, ſo verhält ſich AD zu DB, wie AE zu EC.** Tab. 4. Fig. 71.

Da

Da die Dreyecke DEB und DEC einander gleich ſind, (§. 433.) ſo hat das Dreyeck ADE zu erſt benannten beyden Dreyecken einerley Verhältniß. Es verhält ſich aber das Dreyeck ADE zum Dreyeck BDE, wie die Linie AD zur Linie DB, und das Dreyeck ADE verhält ſich zum Dreyeck CDE, wie die Linie AE zur Linie EC, (§. 494.) alſo verhält ſich AD zu DB, wie AE zu EC.

§. 496. Da nicht nur das erſte Glied einer Proportion ſich zum zweiten verhält, wie das dritte zum vierten, (§. 224.) ſondern das erſte ſich ebenfalls zum dritten verhält, wie das zweite zum vierten, (§. 238.) ſo kann man obige Proportion (AD: DB = AE: EC) durch Verwechslung verändern, und ſagen: AD: AE = DB: EC.

§. 497. Wenn AD ſich zu DB verhält, wie AE zu EC, ſo iſt die Linie DE mit der Grundlinie BC parallel. Tab. 4. Fig. 71.

Wenn ſich die Linie AD zur Linie DB verhält, wie AE zu EC, und wenn das Dreyeck ADE ſich zum Dreyeck DEB verhält, wie die Linie AD zur Linie DB, und das Dreyeck ADE ſich verhält zum Dreyeck DEC, wie die Linie AE zur Linie EC, ſo verhält ſich das Dreyeck ADE zum Dreyeck DEB, wie das Dreyeck ADE zum Dreyeck DEC, d. i. △ DEB iſt gleich △ DEC, mithin iſt die Linie BC mit DE parallel. (§. 277.)

§. 498. Wenn in einem Dreieck der nur genannte Winkel von der Linie ED halbirt wird, ſo verhält ſich AE zu EB, wie AD zu BD; denn man nehme auf der verlängerten AE, EC = EB, ſo iſt AEB = EBC + ECB = 2 ECB, alſo iſt AED = ECB, und

und ED und CB parallel, folglich EC oder EB verhält ſich zu BD, wie EA zu AD; und umgekehrt: Wenn AE : EB = AD : BD, ſo halbirt ED den Winkel. Nimmt man wieder EC = EB, ſo iſt AE : EC = AD : BD; alſo iſt ED mit CB parallel, und AED = ACB = $\frac{1}{2}$ ECB + ECB = $\frac{1}{2}$ AEB. (§. 394. 401. 409. 411.) Tab. 4. Fig. 71.

§. 498. **Wenn in zweyen Dreyecken ABC und DCE die Winkel BAC und CDE, ferner die Winkel ABC und DCE einander gleich ſind, und alſo (§. 422.) ACB = DEC, ſo verhalten ſich jede zwo Seiten des einen Dreyecks, wie die beyden Seiten des andern, die den gleichen Winkeln gegen über ſtehen, und ſind alſo die beyden Dreyecke einander ähnlich.** (§. 356.)

Man lege zwo Seiten, die in beyden Dreyecken gleichen Winkeln gegen über ſtehen, in eine gerade Linie, wie BC und CE, ſo iſt BA mit CD, und CA mit DE parallel, (§. 409.) und ED ſtößt verlängert mit BA zuſammen. (§. 412.) Geſchicht diß Zuſammenſtoſſen der Linien in F, ſo iſt DF = CA und CD = AF. (§. 416.) Ferner verhält ſich BA zu BC, wie AF zu CE, und BC verhält ſich zu DF, wie CE zu DE; (§. 496.) Man kann alſo CD ſtatt AF, und AC ſtatt DF ſchreiben, und alsdann gibt es folgende Proportionen:

1) BA : BC = CD : CE.

2) BC : AC = CE : DE.

Da man nun die erſte dieſer Proportionen auch folgendergeſtalt ſetzen kann:

3) BA : CD = BC : CE

und

und die zwote, wie folgt

4) BC : CE = AC : DE,

ſo kann man nunmehr ſagen:

5) BA : CD = AC : DE

und diß wieder verſezt gibt

6) BA : AC = CD : DE.

§. 500. Weil Tab. 4. Fig. 71. der Winkel ADE dem Winkel ABC und der Winkel AED dem Winkel ACB gleich iſt, (§. 413.) ſo ſind die Dreyecke ADE und ABC einander ähnlich, (§. 497.) mithin kann man auch ſagen:

1) AD : DE = AB : BC

und durch die Verſetzung

2) AD : AB = DE : BC.

Ferner iſt ebenfalls

3) AE : DE = AC : BC,

und verſetzt:

4) AE : AC = DE : BC

und alſo folgt aus Nro. 2. und 4., daß

5) AD : AB = AE : AC.

§. 501. **Wenn in den beyden Dreyecken BAC und bac ſich BA verhält zu AC, wie ba zu ac, und AC ſich verhält zu CB, wie ac zu cb,** (woraus die Proportion BA : BC = ba : bc entſteht,) **ſo ſind die Winkel in der Ordnung gleich, wie ſie den proportionirten Seiten gegen über ſtehen, und alſo ſind die Dreyecke einander ähnlich.** Tab. 4. Fig. 73.)

Es ſey pbc = B, und pcb = C, ſo verhält ſich (§. 499.) BA zu BC, wie bp zu bc. Oder, wenn man, ſtatt der erſten Verhältniß, (BA : BC)

die

die ihr gleiche Verhältniß im Dreyeck bac ſetzt, ſo verhält ſich ba zu bc, wie bp zu bc; alſo iſt ba gleich bp. Eben ſo verhält ſich AC zu BC, wie pc zu bc, oder ac verhält ſich zu bc, wie pc zu bc, und ac iſt gleich pc; folglich haben die Dreyecke bpc und bac nicht nur einerley Seiten, ſondern auch einerley Winkel, (§. 383.) und dieſe zwey Dreyecke ſind alſo einander gleich und ähnlich; und es iſt der Winkel abc gleich dem Winkel cbp, und der Winkel cbp iſt gleich dem Winkel B, und der Winkel acb iſt gleich dem Winkel bcp, und der Winkel bcp iſt gleich dem Winkel C; aber a iſt gleich p, und p iſt gleich A.

§. 502. Dreyecke, die einerley Winkel, (§. 499.) oder proportionirte Seiten (§. 501.) haben, ſind alſo, wie ſchon geſagt, ähnlich, (§. 356.) und ähnliche Dreyecke haben beydes, weil aus jedem das andere folgt. Da ſich zwei Dreyecke entweder durch die Winkel, oder durch die Verhältniſſe ihrer Seiten unterſcheiden laſſen, ſo ſcheinen dieſe Sätze ſchon aus dem Begriff der Aehnlichkeit zu folgen, da ähnliche Dinge ohne Zweifel ſolche ſind, die man durch keine andern Merkmale als ihre verſchiedene Größe unterſcheiden kann, denn ähnliche und gleiche Dinge ſind weiter nichts, als ein Ding, das man ſich zweimal vorſtellt.

§. 503. **Wenn in zweyen Dreyecken B gleich abc iſt, und AB ſich verhält zu BC, wie ab zu bc, ſo ſind die Dreyecke ähnlich.**

Tab. 4. Fig. 73.

Iſt

Iſt cbp gleich B gleich cba, und ferner bcp gleich C, ſo ſind die Dreyecke BAC und bpc ähnlich, (§. 499.) und bp verhält ſich zu bc, wie BA zu BC, und BA verhält ſich zu BC, wie ba zu bc, alſo iſt bp gleich ba, und die Dreyecke bpc und bac ſind einander ähnlich und gleich, (§ 373.) alſo ſind BAC und bac ähnlich, oder A = a, und C = bca, und BC verhält ſich zu CA, wie bc zu ca.

§. 504. Eine gegebene Linie AB kann in Theile getheilt werden, die eben die Verhältniſſe unter einander haben, wie die gegebenen Theile AD, DE, und EG einer andern Linie. Tab. 4. Fig. 74.

An die getheilte Linie AG ſetze man AB, und ziehe BG durch die Endpuncte, und durch die gegebenen Theilungspuncte D und E die Parallelen DH und EF, ſo verhält ſich AD zu DE, wie AH zu HF, und DE verhält ſich zu EG, wie HF zu FB. Tab. 4. Fig. 74.

Der erſten Proportion AD : DE = AH : HF iſt §. 499. bereits erwähnt worden; Nach eben dieſem Paragraphen kann man alſo ſagen:

1) AD : DE = AH : HF,

und aus dem nemlichen Grunde,

2) AE : EG = AF : FB.

Da nun beyde Proportionen nach §. 238. folgendergeſtalt verſetzt werden können:

3) AD : AH = DE : HF,

und

4) AE : AF = EG : FB,

ſo folgt hieraus, daß, weil die Dreyecke ADH und AEF ähnlich ſind §. 499., und alſo

5) AD : AH = AE : AF,

auch

auch

6) DE : HF = EG : FB

ſeyn müſſe, welches letztere durch die Verſetzung

7) DE : EG = HF : FB gibt.

§. 505. Soll die Linie AB (§. 504.) in eine gegebene Menge gleicher Theile getheilt werden, ſo darf man nur AG aus ſo viel gleichen, willkührlich angenommenen Stücken AD = DE = EG u. ſ. w. zuſammenſetzen. Tab. 4. Fig. 74.

§. 506. **Wenn man zu drey gegebenen Linien AB, BC und BD die vierte Proportionallinie ſuchen will**, ſo trage man die drey Linien auf die Schenkel eines willkührlichen Winkels, nemlich die erſte und zwote Linie aus der Spitze auf den erſten und andern Schenkel, die dritte wieder auf den erſten Schenkel, von dem Punct an, wo die erſte Linie aufhört, alsdann ziehe man BC und DE parallel, ſo iſt CE die geſuchte vierte Proportionallinie, oder AB verhält ſich zu AC, wie BD zu CE. (§. 499.) Tab. 4. Fig. 75.

§. 507. Wenn BD = AC, ſo findet man auf eben dieſe Art zu zwo Linien die dritte.

Tab. 4. Fig. 75.

§. 508. Wenn man zwiſchen zwo Linien AB und BC eine mittlere geometriſche Proportionalzahl finden will, ſo beſchreibe man über ihrer Summa einen halben Kreis, den ein Perpendikel durch B in D ſchneidet, ſo iſt BD die geſuchte Linie. Tab. 4. Fig. 76.

Zieht man AD und DC, ſo iſt ADC einem rechten Winkel gleich (§. 473.), d. i. ADB + BDC iſt gleich BDC + C (§. 426.); alſo iſt ADB = C, folglich A = BDC (§. 428.), und AB verhält ſich zu BD, wie BD zu BC (§. 499.)

§. 513. Jedes rechtwinklichte Dreieck wird durch den Perpendickel von dem rechten Winkel auf die Hypotenuſe in zwey Dreiecke getheilt, die unter ſich und dem Ganzen ähnlich ſind.

§. 510. Wenn ſich die beyden Seiten AB und AC eines Rechtecks ABCD mit einer Linie AE = AF ausmeſſen laſſen, ſo ſteckt das Quadrat von AE in dem Rechteck ſo vielmal, ſo viel Einheiten das Product AC × AB enthält, wenn man die beyden Seiten als Zahlen anſieht, deren Einheit die Linie iſt, die ſie beyde mißt. Tab. 5. Fig. 81.

Der Linie AE Quadrat AFGE kann ſo vielmal neben einander auf AB geſezt werden, ſo vielmal ſeine Seite in AB enthalten iſt, diß gibt alſo eine Reihe Quadrate, die an AB anliegt. An AC aber können ſo viel ſolcher Quadrate geſezt werden, ſo vielmal AE in AC enthalten iſt, und alſo ſo viel Reihen Quadrate hinter einander ſtehen. Folglich beſtimmt AB auf die erwähnte Art, als eine Zahl betrachtet, die Menge der Quadrate in einer Reihe, und AC die Zahl der Reihen, alſo beyder Zahlen Product beſtimmt die Menge der Quadrate zuſammen. Nimmt man ein ſolches Quadrat als die Einheit an, mit welcher Flächen ſollen ausgemeſſen werden, ſo gibt dieſe Multiplication den Innhalt der Fläche, nemlich die Menge ſolcher Flächeneinheiten, die in dem Rechteck enthalten ſind.

Es ſey AB = 7 Schuh
AC = 4 Schuh, ſo iſt des ganzen
Rechtecks Innhalt = 7 × 4 = 28 □ Schuh.

Mißt man nach Ruthen, Zollen, u. ſ. w., ſo bekommt man Quadratruthen, Quadratzolle.

Weil alles Ausmeſſen einer Gröſſe in der Vergleichung derſelben mit einer bekannten Gröſſe von eben der Art beſteht, ſo iſt leicht einzuſehen, daß man zum Maas der Flächen wieder eine Fläche annehmen müſſe. Man hat daher gewiſſe Quadrate hiezu erwählt, und ihnen den Namen von der Länge ihrer Seiten gegeben. So heißt alſo eine Quadrat- oder Flächen-Ruthe ein ſolches Quadrat, deſſen Seite eine Ruthe lang iſt, ein Quadratſchuh ein Quadrat, deſſen Seite einen Schuh, ein Quadratzoll ein Quadrat, deſſen Seite einen Zoll, und eine Quadratlinie ein Quadrat, deſſen Seite eine Linie beträgt. Weil man nun alle Flächen durch Quadrate auszumeſſen pflegt, ſo iſt daher der Ausdruck quadriren entſtanden, welcher nichts anders ſagen will, als den Innhalt einer Fläche beſtimmen; oder die **Quadratur der Figur** bedeutet die Ausrechnung ihres Innhalts.

§. 511. Wäre die eine Seite des Rechtecks ABCD Tab. 5. Fig. 81. gleich ſieben Schuhen, die andere gleich vier Schuhen, fünf Zollen, ſo müßte man die erſte Seite auch in Zollen ausdrücken, damit man die Menge von Quadratzollen bekomme, welche den Innhalt geben.

§. 512. Wäre ABCD Tab. 5. Fig. 81. ein Quadrat, ſo käme der Innhalt heraus, wenn man eine Seite deſſelben mit ſich ſelbſt multiplicirt.

§. 513. Aus dem vorhergehenden iſt klar, daß nach dem zehentheilichen Maas eine Quadratruthe 100 Quadratſchuh, folglich ein Quadratſchuh 100 Quadratzoll, und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien enthalte. Man kann daher ein ſolches Quadratmaas gar leicht unter andere Benennungen bringen, wenn man von der Rechten gegen die Linke immer zwo Zahlen abſchneidet; zum E. $24367''$ geben $\overset{\circ}{2}43'67''$, oder wenn man $\overset{\circ}{7}$ in Quadratzolle verwandeln ſollte, ſo hängt man 4 Nullen an, und man bekommt $70000''$.

§. 514. Um den Flächeninnhalt eines ſchiefen Parallelogramms zu finden, laſſe man, von welchem Punct einer Seite man will, einen Perpendikel EG auf die gegenüberſtehende Seite fallen, welche alsdann die Höhe des Parallelogramms vorſtellen wird. Hierauf meſſe man ſowohl die Grundlinie, als auch die Höhe, und multiplicire beyde in einander, ſo iſt das Product der verlangte Innhalt. Tab. 3. Fig. 52.

Es ſey das Parallelogramm EBCF gegeben, die Grundlinie BC ſey gleich $35''$, und die Höhe EG = $32'''$, ſo iſt der Innhalt deſſelben BC × EG, d. i. 35 × 32, oder, wenn man wirklich multiplicirt 1120□‴, d. i. 11□″, 20□‴. Der Innhalt iſt alſo einem Rechteck BADC über eben der Grund-

linie

linie BC gleich, und die ſenkrechte Seite dieſes Rechtecks AB iſt gleich der ſenkrechten Linie EG.

§. 515. Haben zwey Parallelogramme EFGH und IKLM einerley Höhe EG, ſo verhalten ſie ſich gegen einander, wie ihre verſchiedene Grundlinien GH und LM. Tab. 5. Fig. 82.

Man kann den Innhalt von EFGG erfahren, wenn man die Grundlinie GH mit der Höhe EG multiplicirt, und den Innhalt von IKLM erfährt man, wenn man die Grundlinie LM mit eben der Höhe EG multiplicirt. (§. 510.) Dieſe beyden Rechtecke verhalten ſich wie die Producte aus EG in GH, und aus EG in LM, d. i. wie GH zu LM.

§. 516. Wenn zwey Parallelogramme einerley Grundlinie haben, ſo verhalten ſie ſich gegen einander, wie ihre verſchiedene Höhen.

Den Beweiß hievon kann man auf eben ſolche Art führen, wie oben. (§. 315.)

§. 517. Da man jeden Triangel als die Helfte eines Parallelogramms betrachten kann, (§. 435. 437.) ſo müſſen nicht nur Triangel von gleichen Höhen ſich wie ihre Grundlinien, (§. 494.) ſondern auch Triangel von gleichen Grundlinien ſich wie ihre Höhen verhalten, weil die Hälften eben die Verhältniß haben, wie die Ganzen.

§. 518. Der Innhalt eines Dreyecks ABC kommt heraus, wenn man das Product aus ſeiner Höhe BD in die Grundlinie AC halbirt. (§. 437.) Tab. 2. Fig. 40.

Man wähle eine Seite der Figur, z. E. AC zur Grundlinie, und ziehe aus der entgegengeſetzten Spitze die ſenkrechte Linie BD, welche in dieſem Falle die Höhe vorſtellt, (§. 434.) ſo iſt die Hälfte von AC multiplicirt mit BD, oder die Hälfte von BD multiplicirt mit AC, oder $\frac{BD \times AC}{2}$ der Innhalt des Dreyecks ABC.

§. 519. Jedes Vieleck ABCDE läßt ſich durch Diagonalen in Dreyecke zertheilen, die man alſo nach §. 518. einzeln ausrechnen, und zuſammen addiren kan. Zur Verkürzung der Arbeit muß man allezeit die Seite, die zweien Dreiecken gemein iſt, für ihre gemeinſchaftliche Grundlinie annehmen, und darauf die Höhen von den gegenüberſtehenden Winkeln fällen. Tab. 5. Fig. 83.

§. 520. In einem ordentlichen Vieleck ABCDEF darf man nur einen Triangel ABK ausrechnen, und dieſen gefundenen Innhalt durch die Zahl der Seiten multipliciren. Tab, 4. Fig. 68.

§. 521. Ein Trapezium BCDE, von welchem zwo Seiten BE und CD gleichlaufend ſind, auszurechnen, theile man es durch CE in zwey Dreiecke, ſo iſt das Dreieck BCE gleich CF. $\frac{1}{2}$ BE, und das Dreyeck CDE gleich EG. $\frac{1}{2}$ CD, wenn CF und EG Perpendikel auf die beyden gegenüberſtehenden Seiten BE und CD ſind; aber dieſe Perpendikel ſind gleich (§. 412.); alſo iſt die Summe beider Dreiecke oder das Trapezium = CF. $\frac{(BE + CD)}{2}$. Tab. 7. Fig. 114.

§. 522.

§. 522. Will man eine Figur BCDEFgc noch bequemer, als nach §. 519. ausrechnen, ſo ziehe man durch ſie nach Gefallen eine Linie, etwa durch zween Winkel BF, und ſetze auf ſolche durch alle Winkel der Figur die Perpendikel Cc, Dd, Ee u. ſ. w. ſo geben ſich an den Enden Dreiecke, wie BCc, in der Mitte aber Trapezia Cc Dd, die man bequem ausrechnen kann, weil man nur den Abſtand der bejden Seiten Cc, Dd auf BF zu meſſen, und mit $\frac{1}{2}$. (Cc + Dd) zu multipliciren braucht. Man hat alſo viele Perpendikel nicht nöthig, da ſich die Perpendikel auf BF als Parallellinien durch verſchiedene Handgriffe geſchwind ziehen laſſen. Die Trapezia werden hernach zuſammen addirt.

Die Einheit ſei ein Schuh, die Stücke der Linie BF, die zwiſchen B und Cc, zwiſchen Cc und Dd, zwiſchen Dd und Gg, zwiſchen Gg und Hh fallen, ſeien nach dieſer Ordnung 7; 2; 3; 5.

Ferner ſei Cc = 4
Dd = 5
Gg = 6
Hh = 9,

ſo iſt das Dreieck B Cc = 7. 2 = 14

$$\text{Cc Dd} = \frac{4+5}{2} \cdot 2 = 9$$

$$\text{Dd Gg} = \frac{5+6}{2} \cdot 3 = 16{,}5$$

$$\text{Gg Hh} = \frac{6+9}{2} \cdot 5 = 37{,}5$$

Das Stück BCDGHhgdcB = 77

Tab. 7. Fig. 115.

§. 523. Gibt es unter den Gränzen der Figur ghekF krumme Linien, ſo nehme man darauf Puncte g, h, e, K, ſo nahe beiſammen, daß die Krümmung unmerklich wird, welches hier allezeit angenommen werden kann, da nur von der Ausübung und dem, was in die Sinne fällt, die Rede iſt.

So läßt ſich ein Feld, das in Grund gelegt iſt, ausrechnen. Man könnte es auch mit dienlichen Werkzeugen auf dem Felde ſelbſt vornehmen. Sonſt aber läßt ſich ein Feld, ohne daß man eine Zeichnung davon machen darf, durch die Zerlegung in Dreiecke ausrechnen, wenn man die Seiten und die Diagonalen alle gemeſſen hat, und den Innhalt eines Dreiecks aus ſeinen drei Seiten zu berechnen weiß, welche Regel ſich durch die Algebra leicht finden läßt, und in der praktiſchen Geometrie von groſſen Nutzen iſt. Tab. 7. Fig. 115.

§. 524. Aehnliche Dreiecke ABC und abc verhalten ſich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Man ziehe ihre Höhen BD und bd, ſo verhält ſich das Dreieck ABC zu dem Dreieck abc, wie ſich BD. AC verhält ſich zu bd. ac; aber das Dreyeck ABD iſt ähnlich dem Dreieck abd, alſo verhält ſich BD zu bd, wie AB zu ab. Ferner verhält ſich AB zu ab, wie AC zu ac, alſo verhält ſich BD zu bd, wie AC zu ac, oder $BD = \frac{bd.\ AC}{ac}$; folglich verhält ſich $\triangle$ ABC zum $\triangle$ abc, $\frac{bd.\ AC.}{ac}$ wie AC zu bd. ac, wie AC. AC zu ac. ac,

oder

oder wie die Quadrate der Seiten AC und ac; aber weil AC: ac = AB: ab = BC: bc, ſo iſt die Verhältniß der Dreiecke mit der Verhältniß der Quadrate jeder zwo ähnlich liegenden Seiten einerlei. Tab. 2. Fig. 40.

§. 525. **Aehnliche Figuren verhalten ſich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.**

Sie laſſen ſich in ähnlich liegende Dreiecke theilen.

Alſo verhält ſich

das Dreieck AED zum Dreieck aed, wie das Quadrat von AE zum Quadrat von ae;

$$(\triangle AED : \triangle aed = AEq : aeq)$$

das Dreieck ADB verhält ſich zum Dreieck adb, wie das Quadrat von AB zum Quadrat von ab;

$$(\triangle ADB : \triangle adb = ABq : abq)$$

Das Dreieck BDC verhält ſich zum Dreieck bdc, wie das Quadrat von BC zum Quadrat von bc,

$$(\triangle BDC : \triangle bdc = BCq : bcq).$$

Da nun die Verhältniſſe der Seiten der Figuren wegen ihrer Aehnlichkeit einerlei ſind, und auch die Verhältniſſe der Quadrate, dieſer Seiten wegen, einerlei ſind, ſo ſind die Verhältniſſe aller dieſer Dreiecke einerlei, d. i.

$$\triangle AED : \triangle aed = \triangle ADB : \triangle adb = \triangle BDC : \triangle bdc,$$

alſo die Summe aller vorhergehenden Glieder zu der Summe aller folgenden

$$= \triangle AED : \triangle aed = AEq : aeq;$$

aber die Summe aller vorhergehenden iſt die eine Figur, und die Summe aller folgenden die andere; alſo ABCDE : abcde = AEq : aeq, wo man, aus der ſchon angegebenen Urſache, ſtatt der letz-

ten Verhältniß, die Verhältniß der Quadrate von jeden zwo andern ähnlich liegenden Seiten nehmen kann. Tab. 7. Fig. 116.

§. 526. Linien, die in zwo ähnlichen Figuren auf ähnliche Art beſtimmt werden, verhalten ſich, wie die ähnlich liegenden Seiten; z. B. DB : db = BA : ba Fig. 116., oder he : HE = ef : EF (Fig. 118.). Alſo verhalten ſich ähnliche Figuren auch wie die Quadrate ſolcher Linien, die in ihnen auf ähnliche Art beſtimmt oder gezogen werden, wenn es gleich nicht Seiten ſind. So verhalten ſich ähnliche Dreiecke (Fig. 40.), wie die Quadrate ihrer Höhen.

§. 527. Wenn von einem Dreyeck ACD der Innhalt und die Grundlinie gegeben wird, ſo kann man die Höhe finden. Tab. 3. Fig. 53.

Es ſey der Innhalt 36′, und die Grundlinie CD 18′. Man dividire nun durch die halbe Grundlinie, nemlich 9′ den Innhalt des Triangels ACD, ſo kommt die Höhe, nemlich 4′ heraus.

Diß beſtimmt aber nicht ein gewiſſes Dreyeck, ſondern nur die Entfernung einer mit der Grundlinie parallel laufenden Linie AE, in welcher die Spitzen aller Dreyecke liegen, welche die gegebene Grundlinie und den gegebenen Innhalt haben, denn es kann unzählich viele verſchiedene Dreyecke geben, bey denen einerley Grundlinie und einerley Innhalt anzutreffen iſt.

§. 528. Diß dient zur Theilung der Figuren. Wenn man eine Figur in eine Menge gleicher Theile theilen ſolle, ſo rechne man ſie erſtlich aus, und

divi-

dividire den gefundenen Innhalt mit der Zahl der Theile. Den Quotienten vergleiche man mit dem äuſſerſten Triangel der Figur ABE; iſt dieſer kleiner, ſo ziehe man ihn von dem Quotienten ab, und ſehe den Unterſchied, als den Innhalt eines Triangels an, deſſen Grundlinie BE iſt. Man finde alſo ſeine Höhe LM. In dieſe Weite ziehe man mit BE eine Parallele; wo ſolche, wie bey N in eine Seite der Figur einſchneidet, da fällt die Spitze des geſuchten Triangels BNE hin. Gibt es noch einen Einſchnitt, wie bey O, ſo könnte der Triangel auch NOE ſeyn. Tab. 5. Fig. 84.

Die Figur halte z. E. 12867′, ſo iſt ihre Helfte in Zollen

$$= 643350''$$
$$\triangle \text{ ABE ſey} = \underline{537300''}$$

ſo bleiben 116050 □″ für △ BNE übrig.

Die Grundlinie BE ſey = 7200″, ſo gibt 116050, dividirt durch die halbe Grundlinie 3600, die Summe von $32\frac{17}{72}$ Zollen. Dieſe Summe iſt gleich der Höhe LM. Alſo iſt der Triangel BNE gleich $\frac{\text{LM} \times \text{BE}}{2}$ gleich 116050 □″, oder gleich 11° 60′ 50″ (§. 527.). So iſt alſo ABNE die eine Helfte, und NEDC die andere Helfte der Figur. Sollte man mehr Theile machen, ſo müſte das folgende Stück eben ſo wie das erſte gefunden werden.

Ein anderes Beiſpiel iſt folgendes:

Will man ein Parallelogramm ſo halbiren, daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct F in

in der Seite ED gehe, ſo nehme man CG = EF, und ziehe FG (§. 521.). Es ſei FH die Weite der Seiten ED und BC, ſo iſt das Trapezium EFGB gleich dem halben FH, multiplicirt mit EF + BG; aber BG verhält ſich zu BC, wie CG zu ED; weil nun ED = BC, und vermöge der Vorzeichnung, EF = CG, ſo iſt BG = FD, oder EF + BG = CG + FD, welches letztere mit eben der halben FH multiplicirt, das Trapezium FGCD gibt. Tab. 7. Fig. 117.

§. 529. Ein jedes regulaires Vieleck, das in den Cirkel eingeſchrieben iſt, läßt ſich verdoppeln, oder in eins verwandeln, das zweimal ſo viel Seiten hat, und diß in eins, das viermal ſo viel Seiten hat u. ſ. w.

Denn es ſei CA der Halbmeſſer, der gegeben iſt, AB die Seite des gegebenen Vielecks, ſo iſt AD die Seite des Vielecks, das noch ſo viel Seiten hat und dieſe Seite läßt ſich aus AB, der Seite des vorigen regulairen Vielecks, und aus AC dem Halbmeſſer, finden. Denn $AD^2 = AE^2 + ED^2$ $AD^2 = AC^2 + DE^2 = 1 - V(1 - \frac{1}{4} AB^2$, wenn $AC = 1$ iſt.

Beweis zu Nro. 1.

$CE = V(CA^2 - AE^2)$, aber
$AE^2 = \frac{1}{4} AB^2$ ſubſtituirt, gibt

$CE = V(CA^2 - \frac{1}{4} AB^2)$

Beweis zu Nro. 2.

$DE = CD - CE$
$CD = CA$ ſubſtituirt,

$DE = CA - CE = CA - V(DE = CA - CE = CA - V(CA^2 - \frac{1}{4} AB^2) = 1 - V(1 - \frac{1}{4} AB^2)$,

Eben

Eben ſo läßt ſich aus dem gefundenen AD die Seite des Vielecks, das zweimal ſoviel Seiten als dieſes, oder viermal ſo viel Seiten, als das erſte hat, finden. Tab. 7. Fig. 118.

§. 530. Wenn man nun die unendlich kleine Seite eines Vielecks einem unendlich kleinen Cirkelbogen gleich ſezt, ſo wird der Halbmeſſer die Höhe des unendlich kleinen Dreyecks ſeyn, folglich die Summe aller dieſer Dreyecke der Innhalt des Cirkels, woraus man die Peripherie und die Verhältniß des Halbmeſſers, folglich auch des doppelten Halbmeſſers oder des Durchmeſſers zur Peripherie findet, welche in allen Cirkeln einerlei ſind, weil ſie alle einander ähnlich ſind. Man wird alſo zulezt auf ein Vieleck kommen, deſſen Seite kleiner iſt, als jede angebliche Gröſſe, und die dem Cirkelbogen ſelber ſo nahe kommt, als möglich iſt. Tab. 7. Fig. 119.

§. 531. Weil die Peripherie des Cirkels eine krumme Linie iſt, und eben deswegen durch eine gerade Linie nicht unmittelbar gemeſſen werden kan, ſo haben ſich Viele die Mühe gegeben, ein paar Zahlen zu finden, welche die wahre Verhältniß des Durchmeſſers eines Cirkels zu ſeiner Peripherie genau beſtimmen. Bis jezt hat man aber noch kein Verhältniß entdeckt, das nach der gröſten mathematiſchen Schärfe richtig wäre. Nach des Archimedis Beſtimmung verhält ſich der Durchmeſſer zur Peripherie ohngefehr wie 7 zu 22, welches Verhältniß aber in groſſen Cirkeln etwas zu viel bringt

bringt, und nicht ſo genau iſt, als das gewöhnliche, deſſen man ſich meiſtentheils in der Ausübung zu bedienen pflegt, nemlich 100 zu 314, bey welchem der Fehler nicht viel über $\frac{11}{1000}$ der Einheit beträgt, und welches eigentlich die erſten drey Ziffern desjenigen Verhältniſſes ſind, das **Ludolph von Cölln** gefunden hat.

§. 532. So lang man nicht im Stand iſt, das genaue Verhältniß des Durchmeſſers eines Cirkels zur Peripherie zu finden, ſo lang kann man auch die Quadratur des Cirkels nicht finden. (§. 510.

§. 533. Unter der Quadratur des Cirkels verſteht man nichts anders, als die Erfindung eines Quadrats entweder in Linien oder in Zahlen, welches ganz genau ſo groß iſt, als der Innhalt des Cirkels.

§. 534. Nimmt man alſo das Verhältniß 100 : 314 an, ſo läßt ſich durch Hülfe der Regel de Tri zu dem gegebenen Durchmeſſer eines Cirkels die Peripherie $= p$ und der Innhalt des Cirkels $= a$ ſelbſt leicht finden. Der Durchmeſſer $= d$, ſey 24 Schuh, ſo ſchlieſſe man, um die Peripherie zu finden, wie folgt:

$$100 : 314 = \overset{d}{24} : \text{Peripherie.}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 1256 \\ 628 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \not{7}\not{8}(36 & 75\ \frac{36}{100} = 75'\ 3''\ 6''' = \overset{p}{\text{Periph.}} \\ \not{1}\not{1}\ 00 & \end{array}$$

Ver-

Verlangt man nun den Innhalt des Cirkels, ſo multiplicire man die gefundene Peripherie 7536‴ durch den vierten Theil des Durchmeſſers, welcher ebenfalls durch Linien auszudrücken iſt. Dieſer vierte Theil iſt in gegenwärtigen Fall 6 oder 600‴;

alſo

$$\begin{array}{r} 7536''' \\ 600''' \\ \hline \end{array}$$

geben 4521600□‴, d. i. 4□°, 52□′, 16□″, (§. 513.) und dieſes Product iſt der Innhalt des Cirkels = a.

§. 535. Das Quadrat des Durchmeſſers verhält ſich zu dem Innhalt des Cirkels, wie beynahe 1000 : 785.

Iſt der Durchmeſſer 100, und die Peripherie 314, ſo iſt das Nuadrat des Durchmeſſers 1000, und der Innhalt des Cirkels (wenn nemlich die Peripherie 314 mit dem vierten Theil des Durchmeſſers 25 multiplicirt wird, (§. 534.) iſt 7850, und wenn man bey beyden Zahlen die lezte Nulle wegläßt, oder mit 10 dividirt, ſo hat man oben benannte Verhältniß (1000 : 785). Diß dient, den Innhalt eines Cirkels aus dem Durchmeſſer zu berechnen, ohne daß man erſt die Peripherie ſucht. Es iſt z. E. (§. 534.) der Durchmeſſer zu 24 angenommen worden; multiplicirt man nun dieſe 24 mit ſich ſelbſt, ſo hat man das Quadrat des Durchmeſſers, nemlich 576′ oder 57600″. Sucht man endlich zu 1000 und 785, und zu 57600″ nach der Regel de Tri die vierte Proportionalzahl, ſo bekommt man den Innhalt des Cirkels, nemlich 45216″ (§. 534.)

§. 536. Iſt die Peripherie gegeben, ſo findet man den Durchmeſſer, wenn man nemlich zu 314 und 100 und der gegebenen Peripherie die vierte Proportionalzahl ſucht.

§. 537. Soll man den Ausſchnitt FKD eines Cirkels berechnen, wovon der Durchmeſſer DH, und auch das Maas des Winkels FKD in Graden gegeben iſt, ſo ſuche man zuerſt die Peripherie, (§. 534.) und ſage alsdenn: 360 Grade verhalten ſich zu dem gegebenen Maas des Winkels FKD, wie ſich die ganze Peripherie zu dem Bogen DF verhält, ſo hat man DF in dem Längenmaaſe, mit welchem der Durchmeſſer gemeſſen worden. Multiplicirt man nun DF mit dem vierten Theil des Durchmeſſers, ſo bekommt man den Inhalt des Ausſchnittes FKD. Tab. 4. Fig. 67. (§. 481. 483.)

Der Durchmeſſer DH ſey 12′, der Winkel FKD 6°, die Peripherie 3768‴, der Bogen DF $62\frac{4}{5}$‴, ſo iſt der Innhalt des Ausſchnitts FKD 18840‴.

Um die Rechnung zu erleichtern, ſuche man zu 100, 314, und dem gegebenen Halbmeſſer die vierte Proportionalzahl, ſo bekommt man die halbe Peripherie nemlich 1884″. Nun ſage man in obigem Exempel: wie ſich verhalten 180 Grade zu 6 Graden, ſo verhält ſich die gefundene halbe Peripherie zu dem Bogen DF im Längenmaaſe. Diß leztere wird alsdenn mit dem vierten Theil des Durchmeſſers multiplicirt, und gibt den Innhalt des Ausſchnitts.

§. 538.

§. 538. Aus der gegebenen Sehne AB eines Bogens, und aus deſſen Höhe FI kann man den Durchmeſſer ID, und auch den Mittelpunct E des Cirkels finden. Tab. 5. Fig. 85.

Es ſey FI oder die Höhe = 8′ 3″;
und die Helfte der gegebenen
Sehne AB = AF ſey = 1° 6′ 6″

ſo kann man ſagen: wie ſich verhält FI zu AF, ſo verhält ſich AF zu FD, oder nach den gegenwärtigen Zahlen

$$\overset{\prime}{8}\,\overset{\prime\prime}{3} : \overset{\circ}{1}\,\overset{\prime}{6}\,\overset{\prime\prime}{6} = \overset{\circ}{1}\,\overset{\prime}{6}\,\overset{\prime\prime}{6} : FD,$$

welches leztere, wenn man die Rechnung würklich anſtellt, 322″ gibt. Addirt man nun FI, nemlich 83″ dazu, ſo hat der ganze Durchmeſſer ID 415″, und dieſer in 2 Theile getheilt, gibt den Halbmeſſer EDF und zeigt alſo auch den Mittelpunct E.

§. 539. Den Abſchnitt, der zwiſchen dem Bogen AIB und der Sehne AB eingeſchloſſen iſt, zu berechnen, ſuche man zuerſt den Innhalt des Ausſchnittes EAIBE, §. 542. und ziehe das Dreyeck AEB davon ab, Tab. 5. Fig. 85.

Man muß alſo die Linien AE, AB und EF wiſſen. Sind nur die beyden erſten, nemlich AE und AB gegeben, ſo findet man EF dardurch, daß man von dem Quadrat AE das Quadrat von halb AB, oder welches einerley iſt, das Quadrat AF abzieht, und aus dem Ueberreſt, welcher eigentlich das Quadrat EF wäre, die Quadratwurzel herausziehet, welches alsdann die Linie EF gibt. Iſt aber AB und die Höhe des Abſchnittes FI gegeben, ſo kann man den Durchmeſſer ID nach Anweiſung §. 536. finden, mit ſeiner Helfte ED einen Cirkel

beſchreiben, die Sehne AB darein tragen, ſodann den Winkel AEB mit dem Transporteur meſſen, und den Ausſchnitt EAIBE §. 538. finden. Zieht man nun FI von dem Halbmeſſer EI ab, ſo bleibt EF übrig, und man kann nunmehr aus AB und halb EF den Innhalt des Dreyecks EAB finden, und ſolchen von dem Ausſchnitt abziehen, ſo bleibt der Abſchnitt AIB übrig.

§. 540. Wenn eine Linie BC mit allen Linien CD, CE, CF u. ſ. w. welche in einer Ebene durch den Ort, wo ſie in die Ebene eintrift, gezogen werden, rechte Winkel macht, ſo ſteht ſie auf der Ebene GHIK ſenkrecht (recta eſt plano). Tab. 7. Fig. 120.

§. 541. Die Neigung einer Linie BD gegen eine Ebene GHIK, oder ihr Winkel mit der Ebene, iſt der Winkel, den ſie mit einer andern Linie macht, die in der Ebene durch den Ort D, wo ſie in die Ebene eintrift, nach dem Ort C gezogen wird, wo ein Perpendickel von einem willkührlichen Puncte der Linie BD auf die Ebene herabgelaſſen, in dieſe Ebene eintrift. Tab. 7. Fig. 120.

§. 542. Die Neigung der Ebenen BCDE und GMLK gegen einander iſt der Winkel zwoer Linien HF und HI, die durch einen Punct H, des Durchſchnitts beider Flächen BC, jede in einer der beiden Ebenen, auf dieſen Durchſchnitt ſenkrecht gezogen werden. Alſo ſteht eine Ebene auf der andern ſenkrecht, wenn dieſer Winkel ein rechter iſt. Tab. 7. Fig. 121.

§. 543.

§. 543. **Gleichlaufende Ebenen** nennt man, die, wenn ſie auch nach allen Seiten erweitert werden, nirgends zuſammenſtoſſen. (§. 324.) Gleichlaufender Ebenen Durchſchnitte mit einer dritten Ebene ſind gleichlaufend, denn ſie ſind in einer Ebene, nemlich in der dritten, und können nie zuſammenſtoſſen. Zwoer Flächen Durchſchnitt iſt ihre gemeinſchaftliche Gränze; alſo eine **Linie**, und bei zwo Ebenen eine gerade.

§. 544. Ein **körperlicher Winkel**, Angulus ſolidus, eine Ecke B iſt zwiſchen mehr als zwo Linien BA, BC, BD, deren nie mehr, als zwo in einer Ebene liegen, an dem Puncte enthalten, wo ſie alle zuſammenſtoſſen. So iſt ein jedes Eck in einem Zimmer ein körperlicher Winkel. Die verſchiedenen ebenen Winkel, woraus er beſteht, machen allemal zuſammen weniger als vier rechte Winkel. Man verſteht hier auswärts gehende, und keine einwärts gehende. Tab. 7. Fig. 122.

§. 545. Ein **Prisma**, **Eckſäule** oder **Pfeiler** iſt der körperliche Raum, der zwiſchen zwo parallelen gleichen und ähnlichen Ebenen, und durch eben ſo viel Parallelogramme, als jede der Grundflächen hat, eingeſchloſſen wird. Man unterſcheidet ſie nach der Zahl der Seitenflächen.

Z. B. ein dreieckiges Prisma wird genannt, deſſen Grundflächen Dreiecke ſind.

Stehen die Seitenflächen ſenkrecht auf den Grundflächen, ſo wird das Prisma ſenkrecht oder gerade genannt; ſtehen ſie aber ſchief auf denſel-

ben, ſo heißt man es ein ſchiefes Prisma. Tab. 5. Fig. 86.

Wenn ein viereckiges Prisma Grundflächen hat, welche Parallelogramme ſind, ſo entſteht ein Parallalepipedum. Tab. 5. Fig. 87.

§. 546. Eine Pyramide iſt derjenige Körper, der eine geradlinichte Figur zur Grundfläche hat, rings herum aber von ſo viel Dreiecken, als Seiten an der Grundfläche ſind, eingeſchloſſen wird, welche oben mit ihren Spitzen zuſammenſtoſſen.

Man nennt die geradlinichte Figur ABC die Grundfläche; die Dreiecke GAC, GCB und GAB die Seitenflächen; den Punct G, wo die Dreiecke zuſammenkommen, die Spitze, und die ſenkrechte Linie, die ſich von der Spitze auf die Grundfläche ziehen läßt, die Höhe der Pyramide. Von der Anzahl der Seiten, welche die Grundfläche hat, pflegt man die Pyramiden drei – viereckig u. ſ. w. zu benennen. Tab. 5. Fig. 91.

§. 547. Iſt die Grundfläche ein Kreis, ſo heißt ſie ein Kegel (Conus), deſſen Axe eine Linie von der Spitze nach dem Mittelpunct der Grundfläche iſt. Steht ſie auf der Grundfläche ſenkrecht ſo heißt der Kegel ſenkrecht (Conus rectus); ſteht ſie ſchief, ſo heißt er ſchief (Conus ſcalenus). Tab. 5. Fig. 93.

§. 548. Der körperliche Raum einer Kugel wird begränzt, indem ſich ein halber Kreis um ſeinen Halbmeſſer als eine Axe dreht, bis er wieder in ſeine erſte Lage kommt. Die Fläche welche von des Halbkreiſes Umfang bei dieſer Umdrehung be-

ſchrie-

ſchrieben wird, heißt die **Kugelfläche.** Tab. 5. Fig. 95.

§. 549. Weil die Axe und der Mittelpunct des beſchreibenden Kreiſes unbeweglich liegen bleiben, jeder Punct der Kugelfläche aber ein Punct in dem Umfang des Kreiſes iſt, ſo ſind alle Puncte der Kugelfläche von dem Mittelpunct des Kreiſes gleichweit entfernt, welcher alſo auch der Mittelpunct der Kugel, ſo wie der Halbmeſſer und Durchmeſſer des Kreiſes, auch der Halbmeſſer und Durchmeſſer der Kugel iſt. Tab. 5. Fig. 95.

§. 550. Ordentliche Körper heiſſen ſolche, die in lauter ordentliche, gleiche Vielecke von einer Art, die gleiche Ecken machen, eingeſchloſſen ſind. Man hat nur fünf dergleichen, nemlich den **Würfel,** das **Tetraedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, Icoſaedrum.**

§. 551. Der **Würfel** (Cubus) oder Hexaedrum iſt in ſechs gleiche Quadrate eingeſchloſſen, und der körperliche Winkel beſteht aus drei rechten, nemlich 3. 90 = 270°. Tab. 5. Fig. 88.

§. 552. Das **Tetraedrum** iſt in vier gleiche und gleichſeitige Dreiecke eingeſchloſſen. Der körperliche Winkel, den alſo je drei Dreiecke mit einander machen, iſt 3. 60 = 180°. Tab. 5. Fig. 92.

§. 553. Das **Octaedrum** iſt in acht gleiche und gleichſeitige Dreiecke eingeſchloſſen, davon je vier Dreiecke zuſammen den körperlichen Winkel ma-

machen, der alſo 4. 60 = 240° hält. Tab. 5. Fig. 92.

§. 554. Das Dodecaedrum iſt in zwölf reguläre gleiche Fünfecke eingeſchloſſen, davon je drei den körperlichen Winkel machen, der folglich, weil der Polygonwinkel im Fünfeck

$= 180 - \frac{360}{5}$ iſt, $= 180 - 72 = 108°$

ſeyn muß, und nach dieſer Rechnung

3. 108 = 324° hält. Tab. 6. Fig. 97.

§. 555. Das Icoſaedrum iſt in zwanzig gleiche und gleichſeitige Dreiecke eingeſchloſſen, davon je fünf zuſammen den körperlichen Winkel machen, der daher 5. 60 = 300° hält. Tab. 6. Fig. 98.

§. 556. Andere reguläre Körper gibt es nicht. Denn ein körperlicher Winkel, den ſechs gleichſeitige Dreiecke machen, würde 6. 60 = 360° halten, folglich in eine und eben dieſelbe Ebene fallen. Eben das gilt von dem körperlichen Winkel, den vier Quadrate machen ſollen, denn 4. 90 = 360°. Sie fallen alſo auch in eine Ebene, und noch viel weniger würden die aus mehr Winkeln beſtehenden regulären Vielecke dazu taugen, z. B. das Sechseck hat zum Polygonwinkel 120, folglich würden drei Flächen davon, die man wenigſtens haben müßte, 3. 120 = 360° machen, welche ſchon in eine Ebene fallen.

Ob man gleich fünf reguläre Körper annimmt, ſo könnte man vielleicht noch die Kugel, als ein Unendlicheck, als den ſechsten anſehen, der aus unendlich viel unendlich kleinen Flächen, und aus gleichen körperlichen Winkeln, die aus dieſen unendlich vielen gleichen Flächen entſtehen, zuſammengeſetzt iſt.

§. 557. Eine gerade Linie, von welcher zween Puncte in einer Ebene ſind, befindet ſich ganz in dieſer Ebene. Da aber die Ebene, in welcher dieſe gerade Linie iſt, ſich um ſie als um eine Axe drehen kann, ſo beſtimmen drei Puncte die Lage einer Ebene; und alſo iſt jeder ebene Winkel und jedes Dreieck in einer Ebene.

Dieſes zeigt, warum eine Sache auf drei Füſſen allemal feſt geſetzt werden kann, welches mit vier oder mehreren nicht ſo leicht angeht.

§. 558. Wenn die gerade Linie BC auf zwo Linien CE und CF ſenkrecht ſteht, ſo ſteht ſie auf jeder Linie HCI, die durch C in der Ebene ECF gezogen wird, d. i. auf dieſer Ebene, ſenkrecht.

Man verlängere die beiden Linien bis CD = CE, und CG = CF, und ziehe durch die vier Puncte G, D, F, E, die alle in der Ebene ECF liegen, Linien, da denn die dritte willkührlich durch C gezogene Linie die Linien GE und DF in H und I ſchneidet. Von einem willkührlich angenommenen Puncte B in BC ziehe man nach allen genannten Puncten Linien. Die Dreiecke, welche herauskommen, geben folgendes Reſultat:

I. △ GCE = △ CDF (§. 375.);

alſo iſt

GE = DF;

CGE = CFD,

CEG = CDF.

II. △ GCH = △ FCI (§. 374. 379.);

alſo iſt

GH = FI;

CH = CI.

III. △ BEC = △ BDC (§. 375.);

alſo

BE = BD.

IV. △ BGC = △ BFC (§. 375.);

alſo

BG = BF.

V. △ BGE = △ BFD (385. 575. I. III. IIII.);

alſo

BGH = BFI.

VI. △ BGH = △ BFI (§. 374. 575. II. IIII. V.)

VII. △ BCH = △ BCI (§. 385. 575. II. VI.)

alſo

BCH = BCI

= R (einem rechten Winkel).

Tab. 7. Fig. 120.

§. 559. Wenn BC auf CE, CF und CI ſenkrecht ſteht, ſo ſind dieſe drei Linien in einer Ebene. Wären ſie es nicht, ſo würden die Ebenen BCI und ECF einander in einer andern geraden Linie als CI, z. B. in Ci ſchneiden, die aber doch in der Ebene BFI ſeyn und durch C gehen müßte; auf

Ci

Ci nun müßte, vermöge des Satzes, BC ſowohl ſenkrecht ſtehen als auf CI (§. 390. 391.)

Tab. 7. Fig. 123.

§. 560. Wenn BC und DE beide auf einer Ebene FG ſenkrecht ſtehen, ſo ſind ſie parallel.

Man ziehe CE, und auf ſie in der Ebene FG das Perpendikel EH = BC, ſo iſt

△ BCE = HEC (§. 375.)

alſo

BE = HC,

daher

△ BHC = △ HBE (§. 385.)

folglich

HEB = BCH = einem rechten Winkel = HEC = HED (§. 412.) und die Linien ED, EB und EC ſind in einer Ebene (§. 558.), in welcher auch BC iſt (§. 556.)

Alſo ſind

BC und ED in einer Ebene, und ſtoſſen doch nicht zuſammen, weil BCE + CED = 2 R, d. i. ſie ſind parallel. Tab. 8. Fig. 124.

§. 561. Wenn von zwo parallelen Linien eine BC auf einer Ebene FG ſenkrecht ſteht, ſo ſteht die andere DE auf dieſer Ebene auch ſenkrecht.

Nach eben dieſen Vorbereitungen erhält man HEB = R (einem rechten Winkel)

alſo iſt

HE auf der Ebene CEB ſenkrecht (§. 557); und in eben der Ebene befindet ſich auch die Parallele ED, alſo iſt auch

HED = R,

aber weil auch

BCE = R (§. 575.), ſo muß auch DEC = R ſeyn (§. 413.),

folglich

ſteht DE auf CE und EH, d. i. auf der Ebene CEH ſenkrecht. Tab. 7. Fig. 123.

§. 562. Zwo Parallelen BC und CD ſind mit einer dritten FG unter ſich parallel, wenn gleich nicht alle drei in einer Ebene ſind.

Man richte durch H auf FG die Linie HI in der Ebene BCGF und die Linie HK in der Ebene FGED ſenkrecht auf, ſo ſind HC und KE auf der Ebene IHK ſenkrecht (§. 560.), alſo unter ſich parallel (§. 577.) Tab. 8. Fig. 124.

§. 563. Wenn die Winkel CBD und EFG nicht in einer Ebene, aber ihre Schenkel CB mit EF, und DB mit FG parallel ſind, und wenn beider Schenkel nach einer Seite der Linie BF liegen, daß CBF, BFE, DBF und BFG innere, entgegengeſetzte, nicht **Wechſelwinkel** ſind (§. 411.), ſo ſind die Winkel gleich.

Nimmt man BC = FE,
BD = FG,

ſo ſind ECBF und BFGD Parallelogramme, und alſo CE = BF = DG; aber auch CE und DG parallel (§. 561.) alſo CEGD ein Parallelogramm, und CD = EG; folglich CBD = EFG (§. 385.) Tab. 8. Fig. 125.

§. 564. Man kann von einem Punct B in der Höhe auf die Ebene CD ein Perpendikel herablaſſen.

Man ziehe in der Ebene die Linie EF, und auf dieſe die Linie BG ſenkrecht (§. 390.). Man ziehe fer-

ferner durch G auf EF in der Ebene die Linie FH ſenkrecht, und laſſe auch aus B die Linie BH ſenkrecht fallen, ſo wird dieſe auf der Ebene ſenkrecht ſtehen. Denn, wenn man durch H die Linie IK mit der Linie EF parallel zieht, ſo ſteht EF auf den Linien GB und GH vermöge der Vorzeichnung, alſo auch IK auf eben dieſer Ebene ſenkrecht (§. 560). Alſo iſt KHB = einem rechten Winkel (§. 538.); da aber BKG = einem rechten Winkel, ſo iſt die Linie BH auf der Ebene GHK oder CD ſenkrecht (§. 539.) Tab. 8. Fig. 126.

§. 565. Wenn man aus einem gegebenen Puncte L auf die Ebene CD ein Perpendikel aufrichten will, ſo fälle man auf dieſe Ebene aus einem willkührlichen Puncte B das Perpendikel BH (§. 563.) und ziehe damit durch L die Linie LM parallel (§. 560.) Tab. 8. Fig. 126.

§. 566. Aus einem Puncte B fallen nicht zwei Perpendikel BG und BH auf eine Ebene, ſonſt gäb es in dem Dreieck BGH zween rechte Winkel (§. 539.). Eben ſo wenig können aus einem Punct L zwei Perpendikel aufgerichtet werden, denn es gibt mit einem Perpendikel BH (§. 561. 564.) nicht zwo Parallelen (§. 413.); auch iſt ein Perpendikel die kürzeſte Linie, die ſich von einem Punct bis an eine Ebene ziehen läßt (§. 405.). Tab. 8. Fig. 126.

§. 567. Wenn aus B ein Perpendikel BH auf die Ebene CD, und ein anderes BG auf die Linie EF in dieſer Ebene fällt, ſo iſt GH auf EF ſenkrecht; denn ſonſt wird eine andere Linie durch G

auf

auf EF ſenkrecht, und ein Perpendikel aus B auf dieſe andere Linie auf die Ebene (nach §. 563.) ſowohl ſenkrecht ſeyn, als BH (§. 565.) Tab. 8. Fig. 126.

§. 568. Wenn BH auf der Ebene CD, und HG auf EF in dieſer Ebene ſenkrecht iſt, ſo iſt BG auf EF ſenkrecht; denn ſonſt gibt es aus B ein anderes Perpendikel auf EF durch den Ort, wo es in EF einſchneidet, eine Linie, die in der Ebene CD auf EF aufgerichtet mit GH parallel iſt (§. 411.), und ein Perpendikel auf dieſe ſenkrechte Linie aus B auf der Ebene CD iſt ſowohl ſenkrecht (§. 563.) als BH (§. 565.) Tab. 8. Fig. 126.

Wenn CD von einer andern Ebene in EF geſchnitten wird, ſo nehme man in dieſer andern Ebene auſſerhalb des Durchſchnitts, wo man will, einen Punct B an, und fälle von ſolchem auf CD das Perpendikel BH, und auf den Durchſchnitt das Perpendikel BG, ſo iſt der Winkel HBG ſpitzig (§. 400.). Es iſt alſo nicht möglich, daß einerlei gerade Linien auf zwo Ebenen, die einander ſchneiden, zugleich ſenkrecht ſtünde; wenn daher eine Linie auf zwo Ebenen zugleich ſenkrecht ſteht, ſo ſind dieſelben parallel. Tab. 8. Fig. 126.

§. 569. Will man durch einen gegebenen Punct B eine Ebene führen, die mit einer gegebenen Ebene CD parallel liegt, ſo fälle man von B auf CD das Perpendikel BH, und ziehe durch H in CD nach Gefallen zwo Linien HK und HG, mit jeder derſelben aber eine parallele durch B. Dieſe bei-

den

den Parallelen nun ſind in einer Ebene (§. 539.) und ſtehen beide auf HB ſenkrecht (§. 413.); alſo ſteht HB auf der Ebene durch ſie ſenkrecht (§. 557.) und dieſe Ebene iſt mit CD parallel Tab. 8. Fig. 126.

§. 570. Eine Linie kann nicht in einem Puncte zugleich auf zwo Ebenen ſenkrecht ſeyn (§. 567.), und durch einen Punct geht mit einer Ebene nur eine Ebene parallel (§. 568.); daher ſteht eine Linie, die auf eine von zwo parallelen Ebenen ſenkrecht ſteht, auf der andern auch ſenkrecht (§. 568.) Tab. 8. Fig. 126.

§. 571. Wenn AH auf der Ebene CD ſenkrecht ſteht, ſo ſteht auf dieſer Ebene jede Ebene durch BH ſenkrecht.

Eine ſolche Ebene ſchneide CD in IK. Auf dieſen Durchſchnitt in BC ſetze man das Perpendikel HG, ſo iſt beider Ebenen Neigungswinkel (§. 500.) GHB gleich einem rechten Winkel (§. 539. Tab. 8. Fig. 126.

§. 572. Wenn die Ebene durch IK und B auf der Ebene CD ſenkrecht ſteht, und in jener aus einem willkührlichen Punct B ein Perpendikel BH auf beider Durchſchnitt IK gezogen wird, ſo ſteht ſolches auf CD ſenkrecht.

Denn man ſetze in CD durch H auf IK das Perpendickel HG, weil BHK als ein rechter Winkel angenommen wird, ſo iſt BHG beider Ebenen Neigungswinkel, alſo auch einem rechten Winkel gleich (§. 500.) und BH iſt auf CD ſenkrecht (§. 557. Tab. 8. Fig. 126.

Ein

Ein Perpendikel aus B auf CD gefällt, iſt mit BH einerlei (§. 565.), und liegt alſo in der ſenkrechten Ebene.

§. 573. Wenn CD von einer ſenkrechten Ebene in IK geſchnitten wird, ſo ſteht jedes Perpendikel HB, das man auf IK in der ſenkrechten Ebene aufrichtet, auf CD ſenkrecht; denn man ziehe HG auf IK in CD ſenkrecht, ſo iſt GHB einem rechten Winkel gleich, d. i. = R. Tab. 8. Fig. 126.

§. 574. Der Durchſchnitt EF der beiden Ebenen CD und EBF ſteht auf der Ebene ihres Neigungswinkels BGH ſenkrecht (§. 540. 557.); alſo ſtehen beide Ebenen auf der Ebene ihres Neigungswinkels, und dieſe auf jenen beiden ſenkrecht (§. 570.) Tab. 8. Fig. 126.

§. 175. Wenn die Ebenen cn und cq (Tab. 8. Fig. 127.), und BEF und CD (Tab. 8. Fig. 126.) einerlei Winkel mit einander machen, ſo kann man ſie mit ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitten ſo aneinander ſetzen, daß BEF mit cn, und CD mit cq in eine Ebene fallen.

Es ſeien ihre Neigungswinkel BGH und bgh, und man lege die Ebene cq ſo in die Ebene CD, daß cf längſt EF, und g auf G fällt, ſo fällt gh längſt GH, weil hgf = R = HGF. Ferner ſtehen die Ebenen bgh und BGH auf einer Ebene CD oder cq, beide alſo über GH oder gh, ſenkrecht (§. 574.) und fallen alſo in eine Ebene, in welcher gb uud GB auf einander fallen müſſen, weil hgb = HGB. Tab. 8. Fig. 127.

§. 576.

§. 576. Parallele Ebenen, wie cn und lo, machen mit einer dritten Ebene cq gleiche Neigungswinkel. Ihre Durchſchnitte mit der dritten ſeien Parallelen, nemlich cf und lq (§. 542), auf welche gh ſenkrecht ſtehe. Durch gh werde auf cq eine Ebene ſenkrecht geſetzt, welche cm und lo in den Parallelen gb und hr ſchneide (§. 540.), ſo iſt bgh = rhp; aber dieſe beiden Winkel ſind die **Neigungswinkel** (§. 574.) Tab. 8. Fig. 127.

§. 577. Wenn die Ebenen cn und lo eine dritte Ebene cq in den parallelen Linien cf und lq ſchneiden, und mit ihr, nach einer Seite zu, gleiche Neigungswinkel machen, ſo ſind ſie parallel.

Denn von einem willkührlichen Punct g des einen Durchſchnittes cf fälle man ghp ſenkrecht auf der andern lq, ſo iſt auch fgh einem rechten Winkel gleich. Zieht man nun gb in cn ſenkrecht auf fg, ſo iſt bgh die Neigung der Ebene cn gegen cq, und fg ſteht auf der Ebene bgh ſenkrecht (§. 557.). Dieſe Ebene ſchneide lo in hr weil auch qh auf dieſer Ebene ſenkrecht ſteht (§. 559.), ſo iſt qhr einem rechten Winkel gleich, und rhp iſt die Neigung der Ebene lo gegen cq, alſo iſt nach der Vorausſetzung rhp = bgh, und rh und bg ſind parallel, weil ſie auch in einer Ebene bgh ſind. Wird alſo ein Perpendikel von b auf rh gelaſſen, ſo ſteht es auch auf bg ſenkrecht (§. 420.), und iſt in der Ebene des Neigungswinkels bgh oder rhp, welche auf beiden Ebenen cn und lo ſenkrecht ſteht (§. 574), daher ſteht dieſes Perpendikel auf beiden Ebenen lo und cn ſenkrecht (§. 571.), die daher parallel ſind (§. 567.) Tab. 8. Fig. 127.

§. 578.

§. 578. Die Parallelen BC nnd DE haben gegen einerlei Ebene KHI einerlei Neigung.

Wenn man von ihnen auf die Ebene die Perpendikel CF und EG herabläßt, die ebenfalls parallel (§. 559.) ſind, ſo ſind die Winkel BCF = DEG (§. 560.), und F = G, folglich CBF = EDG (§. 424.); d. i. die Neigungen ſind gleich (§. 539.) Tab. 8. Fig. 128.

§. 579. Wenn zwo Ebenen, wie BGH und BIK auf einer dritten CD ſenkrecht ſtehen, ſo ſteht der Durchſchnitt jener beiden Ebenen, nemlich BH, auf der dritten Ebene auch ſenkrecht.

Läßt man von einem willkührlichen Punct B des Durchſchnittes beider ſenkrechten Ebenen ein Perpendikel BH auf den Durchſchnitt der einen Ebene IKB mit CD fallen, ſo muß dieſes Perpendikel auf CD ſenkrecht ſtehen (§. 570.); aber ein Perpendikel, das auf dem Durchſchnitt der andern ſenkrechten Ebene aus B mit CD gefällt iſt, iſt auch auf CD ſenkrecht (§. 570.), und folglich mit BH einerlei (§. 565.), folglich iſt der Punct H in beider ſenkrechten Ebenen Durchſchnitt mit CD, folglich in beiden ſenkrechten Ebenen; oder das Perpendikel BH auf der Ebene CD iſt der Durchſchnitt beider ſenkrechten Ebenen. Tab. 8. Fig. 126.

§. 580. Wenn eine Kugel durch eine Ebene geſchnitten wird, ſo entſteht allemal ein Kreis.

Man laſſe aus dem Mittelpunct G der Kugel auf die ſchneidende Ebene das Perpendikel GI fallen, ziehe nach zween willkührlichen Puncten im Umfang des Schnitts, z. B. nach D und E, gerade Linien aus G und I, ſo iſt GD = GE, und GID = GIE = R (§. 539.)

also

alſo iſt

$$
\begin{aligned}
ID^q &= GD^q - GI^q\\
&= GE^q - GI^q\\
&= IE^q \text{ oder}\\
ID &= IE;
\end{aligned}
$$

d. i. alle Puncte des Umfangs ſind von I, als einem Mittelpunct, gleichweit entfernt.

Geht der Schnitt durch der Kugel Mittelpunct ſelbſt, ſo ſind alle Linien, die in ſeiner Ebene aus dem Mittelpunct an ſeinen Umfang gezogen werden, dem Halbmeſſer der Kugel gleich, und alſo iſt er ein Kreis, welcher dem Kreiſe gleich iſt, der die Kugel beſchrieben hat. Tab. 8. Fig. 129.

§. 581. Jeder Schnitt, der nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht, gibt einen kleinern Kreis, als derjenige iſt, welcher die Kugel beſchreibt; jeder Schnitt durch den Mittelpunct aber gibt einerlei gröſten Kreis. Tab. 8. Fig. 129.

§. 582. Eine gerade Linie ſchneidet die Kugelfläche in nicht mehr als zween Puncten. Denn legt man durch zween Puncte, worinnen die gerade Linie die Kugelfläche ſchneidet, und durch der Kugel Mittelpunct eine Ebene, ſo befinden ſich alle Puncte der geraden Linie in dieſer Ebene (§. 556.), und alle Puncte der Kugelfläche, welche in dieſe Ebene fallen, liegen in einem Kreiſe (§. 580.). Sollte alſo die Kugelfläche von der geraden Linie dreimal geſchnitten werden, ſo müſſen drei Puncte dieſes Kreiſes in die gerade Linie fallen (§. 445.) Da

nun die Peripherien zweener Kreiſe einander in den Endpuncten ihres gemeinſchaftlichen Durchſchnittes ſchneiden můſſen, ſo kőnnen auch zween Kreiſe auf der Kugelflăche einander nur zweimal ſchneiden. Tab. 8. Fig. 129.

§. 583. Jeder Kreis auf der Kugel iſt der Durchſchnitt einer gewiſſen Ebene mit der Kugel. Ein Perpendikel aus dem Mittelpunct der Kugel auf die Ebene dieſes Kreiſes geht durch ſeinen Mittelpunct. Ein Perpendikel aus dem Mittelpunct des Kreiſes auf die Ebene deſſelben, geht durch der Kugel Mittelpunct. Eine Linie aus dem Mittelpunct der Kugel durch den Mittelpunct des Kreiſes ſteht auf ſeiner Ebene ſenkrecht (§. 595.). Tab. 8. Fig. 129.

§. 584. Grőßte Kreiſe ſchneiden einander in einem gemeinſchaftlichen Durchmeſſer durch den Mittelpunct der Kugel, und halbiren alſo einander. Es ſchneiden aber alle grőßte Kreiſe einander, weil der Kugel Mittelpunct in aller Ebenen iſt. Tab. 3. Fig. 129.

§. 585. Kreiſe, die einander halbiren, ſind grőßte Kreiſe, denn ſie kőnnen einander nicht halbiren, ohne einerlei Durchmeſſer und folglich ohne einerlei Mittelpunct zu haben; alſo wăre eine Linie aus dem Mittelpunct der Kugel an den gemeinſchaftlichen Mittelpunct beider Kreiſe auf beider Ebenen ſenkrecht (§. 569. 582.) Bei grőßten Kreiſen

ſen fällt ihr gemeinſchaftlicher Mittelpunct mit dem Mittelpunct der Kugel zuſammen, und alſo kann durch dieſen Mittelpunct auf jedes Ebene ein Perpendikel geſetzt werden. Tab. 8. Fig. 129.

§. 586. Wird das Perpendikel auf die Ebene eines Kreiſes durch ſeinen Mittelpunct verlängert, wie z. B. IG, bis es die Kugel in zween Puncten L und K begegnet, ſo iſt jeder dieſer Puncte von allen Puncten des Kreiſes gleichweit entfernt, denn $LDq = LIq + IDq$, und

$$KDq = KIq + IDq,$$

wo LI, IK und ID unveränderlich ſind; D mag im Umfang des Kreiſes liegen, wo es will. Tab. 8. Fig. 129.

§. 587. Wenn ein Punct der Kugelfläche L von allen Puncten eines Kreiſes gleichweit entfernt ſeyn ſoll, ſo muß ein Perpendikel von ihm, z. B. LI, auf des Kreiſes Ebene gelaſſen, durch deſſelben Mittelpunct gehen; denn wenn die Linie LD unveränderlich bleiben ſoll, D mag im Umfang des Kreiſes liegen, wo es will, ſo muß $IDq = LDq - IDq$ unveränderlich, und alſo der Mittelpunct ſeyn. Alſo haben nur die (§. 586.) beſtimmte Puncte dieſe Eigenſchaft, daß ſie von allen Puncten des Kreiſes gleichweit entfernt ſind. Man nennt ſie **Pole des Kreiſes.** Tab. 8. Fig. 129.

§. 588. Wenn eine Ebene durch das Ende des Halbmeſſers auf ihn ſenkrecht geſetzt wird, ſo liegen alle ihre übrigen Puncte auſſerhalb der Kugel (§. 565.), oder ſie berührt die Kugelfläche. Dieſe Ebene iſt für die Kugel, was die Tangente (§. 454.) für den Kreis iſt, und ein Perpendikel auf die Kugelfläche durch einen gegebenen Punct iſt ein Perpendikel auf die Ebene, welche die Kugel in dieſem Punct berührt, und mit der Kugelfläche ein Element, d. i. einen unendlich kleinen Theil gemein hat. Tab. 8. Fig. 129.

§. 589. Eine gerade Linie LK durch die beiden Pole des Kreiſes CDF ſteht auf ſeiner Ebene ſenkrecht und geht durch ſeinen Mittelpunct und durch der Kugel Mittelpunct.

Das Perpendikel Ll von einem Pole L auf den Kreis gefällt, geht durch ſeinen Mittelpunkt (§. 587.), und durch den andern Pol (§. 565. 586.), und durch der Kugel Mittelpunct (§. 583.). Weil es nun durch zween Puncte nur eine gerade Linie gibt, ſo muß die Linie durch beide Pole mit dieſem Perpendikel einerlei ſeyn. Tab. 8. Fig. 129.

§. 590. Ein Kreis LCKF durch die Pole des Kreiſes CDF gezogen, ſteht auf ihm ſenkrecht, und iſt ein gröſter Kreis (§. 580.) und ſchneidet die Ebene des Kreiſes CDF ſo, daß der Durchſchnitt der beiden Ebenen durch den Mittelpunct l des Kreiſes CDF geht, d. i. daß er ein Durchmeſſer von CDF iſt, und alſo dieſen Kreis halbirt. Tab. 8. Fig. 129.

§. 591.

§. 591. Wenn ein gröſter Kreis auf einem andern gröſten oder kleinern ſenkrecht ſteht, ſo geht er durch die Pole dieſes kleinern durch und halbirt ihn; denn man ziehe durch den Mittelpunct des gröſten Kreiſes, d. i. durch den Mittelpunct der Kugel, ein Perpendikel auf die Ebene des kleinern Kreiſes, ſo befindet ſich dieſes Perpendikel in dem gröſten Kreis (§. 572.), und geht durch den Mittelpunct des kleinern Kreiſes (§. 583.) und durch die Pole deſſelben (§. 586.). Der Beweis folgt wie §. 590. Tab. 8. Fig. 129.

§. 592. Wenn zween gröſte Kreiſe aufeinander ſenkrecht ſtehen, ſo geht jeder durch des andern Pole (§. 591.) Tab. 8. Fig. 129.

§. 593. Die Bogen LD und LC gröſter Kreiſe zwiſchen dem Kreiſe CDF und ſeinem Pole ſind gleich (§. 476. 597.) Tab. 8. Fig. 129.

§. 594. Kreiſe, deren Ebenen parallel liegen, heiſſen **Parallelkreiſe**, und die Parallelkreiſe NO und LM haben einerlei Pole Q und R.

Die Pole des einen Parallelkreiſes ſind in einem Perpendikel aus der Kugel Mittelpuncte auf ſeine Ebene (§. 589.) und eben dieſes Perpendikel ſteht auch auf der Ebene des andern ſenkrecht (§. 569.), und geht alſo auch durch ſeine Pole (§. 589.). Es ſchneidet aber die Kugelfläche nur in zween Puncten (§. 584.) und alſo ſind die Durchſchnittspuncte die Pole beider Kreiſe, oder auch mehrerer, deren Ebene parallel liegen. Tab. 8. Fig. 130.

§. 595. Wenn, durch die Pole zweener Parallelkreiſe, QHER und QIFR als größte Kreiſe geführt werden, ſo ſind die Bogen der Parallelkreiſe zwiſchen ihnen, nemlich HI und EF einander ähnlich.

Werden die Ebenen beider Parallelkreiſe in ihren Mittelpuncten G und D (§. 589.) durch die gerade Linie QR geſchnitten, ſo HGQ, IGQ, EDQ rechte Winkel (§. 538. 589.); da aber die Linien HG und ED in einer Ebene, nemlich in der Ebene des Kreiſes QHER liegen, und alſo parallel ſind, eben ſo, wie die Linien IG und FD parallel ſind, ſo ſind alſo die Winkel EDF und HGI einander gleich, und dieſer Winkel Maaſe HI und EF ſind einander ähnlich (§. 481. 562.). Tab. 8. Fig. 130.

§. 596. Jeder der genannten Winkel (§. 595.) iſt die Neigung der Halbkreiſe QHER und QIFR gegen einander (§. 540. 584.); hieraus erhellt ebenfalls ihre Gleichheit. Tab. 8. Fig. 130.

§. 597. Der Kreis LEM kann ein größter ſeyn, wenn er durch den Mittelpunct geht, und dann iſt ſein Bogen, QE, das Maas des rechten Winkels QDE (§. 474.), alſo $=90^\circ=$ QIF (§. 593.). Oder der Bogen QE eines gröſten Kreiſes zwiſchen dem größten Kreiſe LEM und deſſen Pole QE iſt ein Quadrant (§. 480.). Tab. 8. Fig. 130.

§. 598. Die Neigung der Kreiſe QER und QFR hält ſo viel Grade eines größten Kreiſes, als der Bogen EF hat. Eben dieſe Neigung wä-

re

re auch ſo gros, als der Winkel BRC, welcher von zwo Tangenten, nemlich von der einen RB des Kreiſes QER, und von der andern Re des Kreiſes QFR gemacht worden, weil jede Tangente auf dem gemeinſchaftlichen Durchmeſſer QR, in der Ebene ihres Kreiſes ſenkrecht ſteht. Dieſe Tangenten aber ſtellen die Richtungen ihrer Bogen bei R vor, daher ſagt man: die Kreiſe ſelbſt machen bei R oder Q den Winkel BRC = EDF. Ein ſolcher Winkel, den zween größte Kreiſe mit einander machen, heißt ein ſphäriſcher Winkel; ſein Maas iſt ein Bogen eines größten Kreiſes, der zwiſchen den beiden Puncten E und F enthalten iſt, die, ieder in ſeinem Kreiſe, 90 Grade von R entfernt ſind. Sphäriſche Scheitelwinkel ſind gleich, und Nebenwinkel machen zuſammen zween rechte Winkel. Tab. 8. Fig. 130.

§. 599. Wenn RE und RF zween Quadranten größter Kreiſe ſind, ſo ſteht der größte Kreis durch FE auf beide Quadranten ſenkrecht, und geht durch beider Pole; denn dieſer Kreis liegt in der Ebene EDF, welche auf QR ſenkrecht ſteht (§. 597.). Die beiden andern größten Kreiſe gehen aber auch durch die Pole des dritten (§. 592.), welche alſo in Q und R ſeyn müſſen (§. 582.). Tab. 8. Fig. 130.

§. 600. Der Pol eines größten Kreiſes LEM wird gefunden, wenn man auf den Kreis einen

andern größten REQ ſenkrecht ſetzt, und in ſolchen den Bogen EQ = 90° nimmt. Tab. 8. Fig. 130.

§. 601. Wenn man durch die Pole zweener andern Kreiſe einen größten Kreis ſetzen will, ſo muß man ihn auf beide (§. 592.), d. i. auf ihren Durchſchnitt (§. 579.) ſenkrecht ſetzen. Es wird alſo ein größter Kreis LEFM durch die Pole der beiden QER und QFR gehen, wenn ſeine Ebene auf dem Durchmeſſer QR, in welchem ſich jene beiden ſchneiden, ſenkrecht ſteht. Wenn mehr größte Kreiſe einander alle im Durchmeſſer QR ſchneiden, ſo geht LEFM durch alle Pole. Tab. 8. Fig. 130.

§. 602. Wenn B und b (Fig. 131.) die Pole des Kreiſes QER (Fig. 130.) ſind, und wenn C und c (Fig. 131.) die Pole des Kreiſes QFR (Fig. 130.) ſind (§. 601.), ſo iſt EC+CB=90°=CE+EF; alſo iſt EF=BC=bc; folglich Bc=Bcb—bc=180°—EF; oder die Entfernung der beiden Pole zweener größten Kreiſe, die beide nach einer Seite der Kreiſe zu liegen, iſt dem ſpitzigen Winkel der Kreiſe gleich (§. 598.), und die Entfernung des Poles, der auf des erſten Kreiſes einen Seite liegt, von dem Pole, der auf des andern anderer Seite liegt, iſt ihrem ſtumpfen Winkel gleich. Tab. 8. Fig. 130. 131.

§. 603.

§. 603. Zween größte Kreiſe machen mit einem dritten nicht gleiche Winkel nach einer Seite (§. 577. 584. Tab. 8. Fig. 131.

§. 604. Die Möglichkeit eines Prisma zwiſchen zweien Ebenen läßt ſich zeigen, wenn die Lage und Geſtalt der untern Grundfläche BCDE eines Prisma, und eine Ebene, die mit dieſer untern Grundfläche parallel iſt, gegeben ſind.

Zieht man durch einen Winkelpunct der untern Grundfläche eine Linie Bb bis an die parallele Ebene, ſo wird b eben der Winkelpunct in der obern Grundfläche ſeyn. Zieht man mit Bb, durch alle untern Winkelpuncte, bis an die parallele Ebene, die Parallelen Cc, Dd, Ee, ſo gibt ſich in jeder Parallele, wo ſie die parallele Ebene ſchneidet, eben der Winkelpunct der obern Grundfläche. Man hat alſo die Winkelpuncte und Seiten der obern Grundfläche; die letztern ſchlieſſen mit den gezogenen Parallelen die Seitenflächen des Prisma ein. Die Linien Bb, Cc, Dd, Ee ſind alle unter ſich parallel (§. 561.). Nimmt man nun eine Seite der untern Grundfläche, welche man will, z. B. De, und betrachtet die beiden Parallelen durch ihre Endpuncte Dd, Ee, ſo ſchneidet die Ebene, in welcher ſich dieſe Parallelen befinden, die beiden parallelen Ebenen der obern und untern Grundfläche in zwo Parallellinien de, DE, die ſelbſt zwiſchen Parallelen Dd und Ee enthalten, und daher gleich ſind (§. 418.). Eben ſo ſind dc und DC parallel und gleich; da nun vermöge des Verfahrens dc und de mit DC und DE auf einer Seite der Linie Dd liegen, ſo iſt edc = EDC (§. 562.). Betrachtet man nun die Figur, welche die Parallelen durch B, C, D, E, in der parallelen Ebene auf die erwähnte Art bestimmen, ringsherum; ſo findet

ſich, daß in ihr die Winkel und die Seiten, der Größe nach, eben ſo nach einander folgen, wie in der Figur BCDE. Es iſt alſo bcde die obere Grundfläche, und BbcC, CcdD u. ſ. w. ſind Parallelogrammen und Seitenflächen eines Prisma, deſſen Seiten Bb, Cc, Dd u. ſ. w. alle von einer Länge ſind. Tab. 8. Fig. 132.

§. 605. Iſt nur die Ebene gegeben, in welcher die obere Grundfläche des Prisma liegen ſoll, ſo kann die Linie Bb unzählige Lagen haben. Wäre aber der Punct b gegeben, der oben ſeyn ſoll, was B unten iſt, ſo müßte man Bb dadurch ziehen; dieſer Umſtand alſo beſtimmt ein einziges Prisma, da ſonſt unzählige möglich ſind, die der Aufgabe entſprechen. Tab. 8. Fig. 132.

§. 606. Steht Bb auf die untere Grundfläche ſenkrecht, ſo ſteht ſie eben ſo auf die obere (§ 569.), und alle Parallelen, Cc, Dd, Ee ſtehen auf beide Grundflächen ſenkrecht (§. 559.); auch ſind alle Seitenflächen auf beide Grundflächen ſenkrecht (§. 570.). Dieſes zeigt die Möglichkeit eines ſenkrechten Prisma (§. 545.) über jeder Grundfläche und für jede Weite der Grundflächen von einander. Tab. 8. Fig. 132.

§. 607. Die Figur fghi, welche jeder Grundfläche gleich und ähnlich iſt, iſt ein Prisma mit der Grundfläche parallel durchſchnitten; denn jede Ebene, die mit der Grundfläche parallel liegt, ſchneidet die Ebenen Bc, Cc, Dd u. ſ. w. in den Linien

fg,

fg, gh, hi u. ſ. w. die mit BC, DC, DE u. ſ. w. parallel ſind (§. 542.), ihnen gleich ſind (§. 418.), und einerlei Winkel machen (§. 362.). Tab. 8. Fig. 132.

§. 608. Sind zwo Seiten der Grundfläche, z. B. BE und CD parallel, ſo ſind die Seitenflächen Be, Cd, die ihnen zugehören, parallel. Stieſſen ſie irgendwo zuſammen, ſo könnte man durch einen Punct, der in beiden zugleich wäre, eine Ebene mit der Grundfläche parallel legen, deren Durchſchnitte mit beiden Ebenen Be und Cd, alſo durch einen Punct giengen; aber jede Ebene; die mit der Grundfläche parallel liegt, macht in Be und Cd Durchſchnitte, die mit BE und CD parallel (§. 607.) und alſo auch unter ſich parallel ſind (§. 579.). Es erhellt hieraus „daß die Ebenen Bc mit Ed, und Be mit Cd parallel ſeien, wenn die vier Linien Bb, Cc, Dd, Ee parallel ſind.„ Tab. 8. Fig. 132.

§. 609. Sind die Grundflächen Parallelogramme, ſo ſind die Seitenflächen vier Parallelogramme, deren jede zwei gegenüberſtehende parallel ſind (§. 608.). Ein Parallelepipedum (§. 547.) iſt alſo in ſechs Parallelogramme eingeſchloſſen, und die gegenüberſtehenden ſind paarweiſe parallel und gleich, denn BE=CD, Tab. 8. Fig. 132.

§. 610.

§. 610. Ein ſenkrechtes Parallelepipedum hat vier Rechtecke zu Seitenflächen. Sind ſeine Grundflächen ebenfalls Rechtecke, ſo iſt es in ſechs Rechtecke eingeſchloſſen. Man kann es alsdenn rechwinklicht nennen. Seine Seitenflächen ſtehen alle ſenkrecht auf einander, denn wenn Bc, Cd auf BD ſenkrecht ſtehen, ſo ſteht Cc auf BD ſenkrecht (§. 560.), und BCD iſt der Neigungswinkel der Ebenen Bc und Cd. Tab. 3. Fig. 132.

§. 611. Hat ein ſenkrechtes Parallelepipedum Quadrate zu Grundflächen, und iſt die ſenkrechte Weite der Grundflächen der Seite des Quadrats gleich, ſo ſind die Seitenflächen Quadrate von einerlei Grôße mit der Grundfläche, und das Parallelepipedum iſt rechtwinklicht. Es heißt ein **Würfel** (Cubus), deſſen Seite die Seite eines ſolchen Quadrats heißt, deren ſechs ringsherum den Würfel einſchlieſſen. Tab. 5. Fig. 88.

§. 612. Ein Kreis habe B zum Mittelpunct und BA zum Halbmeſſer. Mit der Ebene dieſes Kreiſes liege eine andere Ebene parallel, die von einer Linie, welche durch B nach Gefallen gezogen worden, in k geſchnitten werde. Nun ziehe man durch einen willkührlichen Punct im Umfang des Kreiſes, z. B. durch A, die Linie Aa mit Bb parallel, ſo wird die Ebene durch Bb und Aa die parallele Ebene in einer Linie, die mit BA parallel iſt, ſchneiden (§. 542.). Geſchieht es in ba, ſo iſt

ba

ba = BA (§. 418.), und alſo iſt a in dem Umfang eines Kreiſes, der b zum Mittelpunct und den Halbmeſſer des untern Kreiſes zu dem ſeinigen hat. Da alſo A jeden Punct im Umfang des untern Kreiſes z. B. C vorſtellt, ſo gibt ſich oben auch ein Kreis, und beider zuſammengehörige Puncte ſind mit geraden Linien Aa und Cc verbunden. Dieſen Körper ſchlieſſen alſo zween gleiche und parallele Kreiſe als **Grundflächen**, und eine krumme Seitenfläche ein. Er wird **Cylinder** (Cylindrus) genannt. Die Linie Aa ſei ſeine **Seite**, und die ihr gleiche Linie Bb ſei ſeine **Axe**. Steht die Axe auf der Grundfläche ſenkrecht, ſo heißt der Cylinder ſenkrecht (Cylindrus rectus). Steht die Axe auf der Grundfläche ſchief, ſo heißt der Cylinder ſchief (Cylindrus ſcalenus). Wenn die Axen zweener Cylinder oder zweener Kegel einerlei Neigung gegen ihre Grundfläche, und einerlei Verhältniſſe gegen den Durchmeſſer ihrer Grundflächen haben, ſo heiſſen ſie **ähnlich**. Tab. 5. Fig. 89. 90. Tab. 8. Fig. 133.

§. 613. Jeder Durchſchnitt, der im Cylinder mit der Grundfläche parallel geſchieht, iſt ein Kreis, welcher der Grundfläche gleich iſt; denn man kann die parallele Ebene, in welcher b und a ſind, dem untern Kreiſe um B nahe oder weit legen, und die vorigen Schlüſſe bleiben alle ungeändert, weil die Weite der Ebenen in ſie keinen Einfluß hat.

Man

Man kann ſich alſo vorſtellen, ein Cylinder entſtünde, indem ſich der Kreis bac an der Linie aC ſo herunter bewegt, daß ſeine Ebene ſich beſtändig parallel, und ab beſtändig in der Ebene aAB bleibt. Durch eine ähnliche Bewegung der Figur bcde (Tab. 8. Fig. 159.) an bB herunter entſteht das Prisma. Tab. 8. Fig. 133.

§. 614. Im ſenkrechten Cylinder iſt ABba ein Rechteck (§. 551.), in deſſen Seite Bb die Mittelpuncte aller Querſchnitte (§. 589.) liegen. Der ſenkrechte Cylinder entſteht alſo, indem ſich dieſes Rechteck um die Axe Bb dreht. Die ſenkrechte Weite ſeiner Grundflächen, oder ſeine Höhe iſt die Axe Bb oder die Seite Aa. Tab. 8. Fig. 133.

§. 615. Iſt AC unendlich klein, ſo kann man es als gerade, und ACca als eine unendlich kleine Ebene anſehen, die auf der Grundfläche ſenkrecht ſteht, wenn Bb und Aa ſenkrecht darauf ſtehen (§. 562.). So iſt der Cylinder ein Prisma von unzählich vielen Seiten, und der ſenkrechte Cylinder, iſt ein ſenkrechtes Prisma. Tab. 8. Fig. 133.

§. 616. Wäre Ei = ie, ſo wären die Prismata Eg = ic, denn ſie würden einander decken, oder eins genau in das andere hohle paſſen, wenn man die untere Grundfläche ig des obern Prisma ic auf die untere Grundfläche EC des untern Prisma legte. Ferner: Wenn man die Seitenlinien Ei eines Prisma in lauter gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspuncte Schnitte führt, welche

mit

mit der Grundfläche parallel ſind, ſo ſind zwiſchen jedem Paar nächſter Schnitte gleiche kleine Prismata enthalten; oder das Prisma Eg wird dadurch in ſo viel gleiche Theile getheilt, ſo viel man in der Linie Ei macht. Läßt ſich alſo ie, das nun Ei nicht mehr gleich geſetzt wird, in Theile von eben der Größe theilen, wie man in Ei gemacht hat, ſo enthält das Prisma ic ſo viel kleine gleiche Prismata, ſo viel ie gleiche Theile enthält. Wenn man ſich nun erinnert, daß Dreiecke von gleicher Höhe ſich wie ihre Grundlinien verhalten (§. 494.), ſo kann man hier ſchlieſſen: Eg: ic=Ei: ie, auch wenn eine dieſer Verhältniſſe irrational wäre. Die kleinen Prismata (Tab. 8. Fig. 132.) ſind hier völlig das, was die kleinen Dreiecke DEd und BAb in Abſicht auf die beiden großen DEC und CAB ſind (§. 494.) Tab. 4. Fig. 70.

§. 617. Haben alſo zwei Prismata gleiche und ähnliche Grundflächen EC und ig, und machen ihre Seitenlinien Ei und ie, die durch ähnlich liegende Winkelpuncte der Grundflächen gehen, gleiche Winkel mit den Grundflächen (§. 600.), ſo verhalten ſich die Prismata, wie dieſe Seitenlinien; folglich auch wie Perpendikel, die von i und e auf EC und ig gelaſſen werden, oder wie die Höhen der Prismatnm, denn dieſe Perpendikel werden ſich wie Ei: ie verhalten (§. 559.). Iſt das Prisma ſenkrecht, ſo ſind Ei und ie ſelbſt die Höhen. Tab. 8. Fig. 132.

§. 618.

§. 618. Ein Parallelepipedum DECF ſtehe über der Grundfläche ABCD. Die Seitenflächen des Parallelepipedums ſeien ABEF; DCGH; BCGE; ADHF. Zieht man in der Ebene FB nach Gefallen durch A und B parallele Linien, welche EF verlängert, nothwendig irgendwo in I und K ſchneiden werden, ſo iſt AIKB ein Parallelogramm, weil IK auf der verlängerten FE liegt, die mit AB parallel geht, und alſo AI und BK Parallelen zwiſchen Parallelen ſind. Iſt DL der Durchſchnitt der Ebenen HC und AID, und liegt L in der verlängerten HG, ſo ſind DS und AI parallel, weil die Ebenen HC und FB parallel ſind (§. 542.). Iſt CM der Durchſchnitt der Ebenen KBC und HC, ſo werden auch CM und BK parallel ſeyn; alſo ſind CM und AI, beide mit BK; und daher unter ſich parallel (§. 561.). Eben ſo iſt DL mit BK parallel, weil beide mit AI parallel ſind; oder alle vier Linien AI, BK, CM und DL ſind parallel;

alſo iſt IS = AD = BC = KM (§. 428.), weil IL und KM Durchſchnitte der Ebenen DAC und KBC ſind, welche mit zwo parallelen Ebenen HK und BD gemacht worden;

alſo ſind

IMKL = ABCD;
AILD = BKMC;
AIKE = DLMC

Pa-

So entſteht alſo ein zweites Parallelepipedum DKCI, welches mit dem erſten DECF einerlei Grundfläche ABCD hat, und mit ihm zwiſchen einerlei parallelen Ebenen AC und HK ſteht. Mit andern Worten heißt dieſes: Beide Parallelepipeda haben einerlei Höhe, und zwo gegenüberſtehende Seitenflächen des zweiten Parallelepipedi, nemlich AK und DM liegen mit zwo dergleichen Seitenflächen des erſten Parallelepipedi mit AE und DG in einerlei Ebenen. Tab. 19. Fig. 134.

§. 619. Zum Ausmeſſen der Körper nimmt man in der Geometrie Würfel an, und benennt ſie von der Länge ihrer Seiten. Eine Cubikruthe iſt alſo nichts anders als ein Würfel, deſſen Seite, oder deſſen Länge, Breite und Dicke eine Ruthe beträgt. Ein Cubikſchuh iſt ein Würfel, deſſen Seite einen Schuh ausmacht. Ein Cubikzoll iſt ein Würfel, deſſen Seite einen Zoll, und eine Cubiklinie ein Würfel, deſſen Seite eine Linie lang iſt. Was eine Cubikmeile, Cubikelle u. ſ. w. ſey, läßt ſich hieraus leicht einſehen.

§. 620. Die §. 619. benannte Maaſe bezeichnet man wie die Längenmaaſe, nur mit dem Unterſchied, daß man entweder einen kleinen Würfel, oder den Buchſtaben c rechter Hand oben an die Zahl ſetzt. So bedeuten z. E. 37^{co}, $432^{c'}$, $89^{c''}$, $6^{c'''}$ ſoviel,

als 37 Cubikruthen, 432 Cubikſchuhe, 89 Cubikzolle und 6 Cubiklinien. Man pflegt aber im gemeinen Leben den körperlichen Raum nicht allemal durch Würfel auszumeſſen. So mißt man z, E. die Fäſſer nicht durch Kubikſchuhe, ſondern durch gewiſſe cylindriſche Gefäſſe, die man Kannen nennt, aus.

§. 621. Alle **Prismata** und mithin auch alle **Parallelepipeda** und **Cylinder**, welche gleiche **Grundflächen** und gleiche **Höhe** haben, ſind einander gleich. Zerſchnitte man z. B. zwei Prismata, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, (wenn das eine ſenkrecht und das andere ſchief wäre) mit den Grundflächen parallel in lauter Scheiben, ſo dünne, als man will, ſo würden alle dieſe Scheiben einander gleich ſeyn; und da überdieß die beiden Prismata einerlei Höhen haben, ſo können aus dem einen nicht mehr ſolche Scheiben geſchnitten werden, als aus dem andern, und mithin haben ſie beide einerlei körperlichen Innhalt. Eben ſo gilt es auch von den Cylindern und Parallelepipedis.

§. 622. Parallelepipeda von einer Höhe haben einerlei Innhalt, wenn ihre Grundflächen einerlei Inhalt haben.

§. 623. Man kann ein ſenkrechtes, rechtwinklichtes Parallelepipedum ausmeſſen (§. 614.). Tab. 6. Fig. 99.

Das

Das Parallelepipedum ſey EDCBIHF, und FG ſey die Seite des kleinen Würfels, welcher das Maas ſeyn ſoll. Mißt man nun ein paar aneinander liegende Seiten der Grundfläche, z. E. DB und DE, wie auch die Höhe DF durch FG, ſo muß das Product DB ⋈ DE ⋈ DF, oder wenn DB = 3, DE = 4, und DF = 6 iſt, 3 ⋈ 4 ⋈ 6 = 72 diejenige Zahl ſeyn, aus welcher man ſehen kann, wie vielmal das Parallelepipedum den kleinen zum Maas angenommenen Würfel, deſſen Seite FG iſt, enthalte.

Weil in der Länge DB eine Reihe von drey kleinen Würfeln FG, und dieſe Reihe in der Länge DE 4mal hintereinander ſtehen kann, ſo ſieht man, daß auf der Grundfläche BDEC 12 kleine Würfel Platz haben, und daß man alſo, um dieſes Product zu erhalten, nur die Seite BD mit DE multipliciren dörfe. Weil ferner die Höhe DF ſechsmal ſo groß iſt, als die Seite des Würfels FG, ſo iſt klar, daß obgeſagte Reihe von 12 Würfeln 6mal über einander ſtehen könne, und folglich der Innhalt des Parallelepipedi aus 72 ſolchen kleinen Würfeln beſtehe, welche Summe auch herauskommt, wenn man, wie oben geſagt, das Product von BD und DE noch weiter mit der Höhe FG multiplicirt; oder in gegenwärtigem Exempel iſt 3 ⋈ 4 ⋈ 6 = 72.

§. 624. Weil die Seite DB, multplicirt mit der Seite DE, den Innhalt der Grundfläche ausdrückt, indem ſie, vermöge der Vorausſetzung, ein Rechteck iſt, ſo erhellt, daß in dergleichen Fällen das Product aus der Grundfläche in die Höhe den körperlichen Innhalt anzeige.

§. 625. Der **Innhalt** eines **Würfels**, (§. 611.), d. i. ein Product aus ſeiner Grundfläche in die Höhe, muß der Cubikzahl ſeiner Seite gleich ſeyn. **Tab. 6. Fig. 100.**

Wenn das Parallelepipedum QBADSMP ein Würfel iſt, und daher BA = BQ = BP, ſo iſt das Product, welches den Innhalt deſſelben ausdrückt, nemlich BA ⋊ BQ ⋊ BP = BA ⋊ BA ⋊ BA, d. i. = BA^3. Man mißt daher einen gegebenen Würfel aus, wenn man unterſucht, wie oft die Seite desjenigen Würfels, den man zum Maasſtab angenommen hat, in der Seite des auszumeſſenden Würfels enthalten iſt, und die Zahl welche dieſes anzeigt, zur dritten Dignität erhebt.

Wäre z. E. PR zum Maasſtab des gröſſeren Würfels angenommen, und wäre PR in PM viermal enthalten, ſo würde der gröſſere Würfel QBADSMP den kleinen Würfel PR 4 ⋊ 4 ⋊ 4, d. i. 64mal in ſich faſſen. Wird nun der Innhalt eines Würfels dadurch gefunden, daß man ſeine Seite mißt, und zur Cubikzahl erhebt, ſo läßt ſich leicht abnehmen, daß man umgekehrt aus dem gegebenen Innhalt eines Würfels die Seite deſſelben finden könne, wenn man aus dem Innhalt die Cubikwurzel zieht.

§. 626. Wenn man in dem **Längenmaas** die Eintheilung von 10 zu 10 annimmt, ſo muß in dem körperlichen Maas eine Cubikruthe 10 ⋊ 10 ⋊ 10, d. i. 1000 Cubikſchuh, und aus eben dem Grund ein Cubikſchuh 1000 Cubikzoll, und ein Cubikzoll 1000 Cubiklinien enthalten. Gilt aber in jenem die Eintheilung von 12 zu 12, ſo muß auch in dieſem,

nemlich

nemlich dem körperlichen Maaß, die Eintheilung von 12 zu 12 gemacht werden.

§. 627. Die übrigen Parallelepipeda, die keine Rechtecke zu Grundflächen haben, werden ausgemeſſen, wenn man ihre Grundfläche ausrechnet, und in die Höhe multiplicirt, weil ein Parallelepipedum, deſſen Grundfläche ein ſchiefwinklichtes Parallelogramm iſt, einem andern, deſſen Grundfläche ein Rechteck iſt (§. 623.), gleich ſeyn muß, wofern nur die Grundfläche des erſten ſo gros, als die Grundfläche des andern, und die Höhe in beyden einerlei iſt (§. 514. 515. 521.).

§. 628. Wird ein Parallelepipedum CBDMP durch eine ebene Fläche ſo getheilt, daß der Schnitt nach den Diagonallinien BG und QM der Grundflächen geht, ſo muß daſſelbe dadurch in zwei gleiche dreieckigte Prismata CBGMPQ und BGDRMQ abgetheilt werden. Denn die beiden dreieckigten Prismata, welche durch dieſe Theilung entſtehen, haben einerlei Höhe, und ihre Grundflächen, nemlich die Triangel CBG und BDG ſind einander gleich, weil ein Parallelogramm durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel getheilt wird; (§. 421.) folglich müſſen ſie auch ſelbſt von gleichem Innhalte (§. 517.) und daher jedes die Hälfte von dem Parallelepipedo ſeyn. Tab. 6. Fig. 101.

Es ſei alſo die Höhe des Parallelepipedi = 10″, ſeine Grundfläche CBDG = 48 □″, folglich die

Grundfläche des dreieckigten Prisma, nemlich $\triangle CBG = \frac{48}{2} \square''$ oder $24 \square''$, ſo muß der körperliche Innhalt des Parallelepipedi 48×10, d. i. $480^{c''}$, folglich der Innhalt des dreieckigten Prisma $\frac{1}{2}\, 48 \times 10$, oder 24×10, d. i. $240^{c''}$ ſeyn. Hieraus erhellt, daß auch der Innhalt eines dreieckigten Prisma gefunden wird, wenn man den Triangel, welcher die Grundfläche deſſelben iſt, ausrechnet, und hernach in die Höhe multiplicirt.

§. 629. Weil ſich alle vielſeitige Figuren durch Diagonallinien in Triangel zertheilen laſſen, ſo folgt, daß ein **vieleckigtes Prisma** in lauter dreieckichte Prismata von eben der Höhe eingetheilt werden könne, deren Grundflächen zuſammen genommen die Grundfläche des Vieleckichten ausmachen. Multiplicirt man nun die Summe der Grundflächen dieſer dreieckichten Prismaten, aus welchen das Vieleckichte beſteht, d. i. die Grundfläche des Vieleckichten, in die Höhe deſſelben, ſo erhält man den Innhalt aller dieſer dreieckichten, und folglich des ganzen vieleckichten Prisma. Ein Prisma wird alſo ausgemeſſen, wenn man ſeine Grundfläche in die Höhe multiplicirt.

§. 630. Weil die **Cylinder** Prismata ſind, welche Cirkel zu Grundflächen haben, ſo kann man auch den körperlichen Innhalt eines Cylinders finden, wenn man die Grundfläche deſſelben in die Höhe multiplicirt.

§. 631.

§. 631. Ein dreieckichte Pyramide iſt der dritte Theil von einem dreieckichten Prisma, das eben die Grundfläche und Höhe hat, ihr körperlicher Innhalt wird alſo gefunden, wenn man den dritten Theil von dem Product aus ihrer Grundfläche in ihre Höhe nimmt. Tab. 6. Fig. 102.

Wenn man das dreieckichte Prisma BCGDEF ſo durchſchneidet, daß der Schnitt nach den Diagonallinien zwoer Seitenflächen z. E. nach den Diagonalen BE und CE geht, ſo iſt der Theil BCEG eine Pyramide, welche mit dem dreieckichten Prismate einerlei Grundfläche und Höhe hat. Wenn man alsdenn die andern Stücke des dreieckichten Prismatis nach der Diagonallinie der dritten Seitenfläche BD, und der erſten BE zertheilt, ſo entſtehen die beiden Pyramiden BDEF und BCDE. Die Pyramide BDEF hat ebenfalls einerlei Grundfläche und Höhe mit dem Prisma, und alſo auch einerlei Grundfläche und Höhe mit der Pyramide BCEG, woraus die Gleichheit beider Pyramiden folgt. Nimmt man in der Pyramide BCEG den Triangel GCE zur Grundfläche an, ſo iſt B die Spitze derſelben. B iſt auch Spitze der Pyramide BCDE, wenn man den Triangel CED als ihre Grundfläche betrachtet. Da nun die beiden Pyramiden BCEG und BCDE eine gemeinſchaftliche Spitze, und folglich einerlei Höhe haben, auch ihre Grundflächen, nemlich die Triangel GCE und CED, einander gleich ſind (§. 425.), ſo muß auch die Pyramide BCEG ſo groß ſeyn, als die Pyramide BCDE. Sind nun alle drei Pyramiden, in welche das dreieckichte Prisma zerſchnitten worden, gleich groß, ſo muß eine jede davon, und folglich auch BCEG, d. i. eine Pyramide, die mit dem Prisma einerlei Grundfläche und Höhe hat, der dritte

Theil davon ſeyn. Dieß iſt am leichteſten einzu- ſehen, wenn man ſich ein dreieckichtes Prisma von Holz, oder einer andern Materie, machen und gehörig ausſchneiden läßt.

§. 632. Wenn eine Pyramide durch eine Ebe- ne parallel mit der Grundfläche durchſchnitten wird, ſo entſteht eine Figur, die der Grundfläche ähn- lich iſt. Tab. 5. Fig. 91.

Wenn in der dreieckichten Pyramide GACB der Schnitt DEF parallel mit der Grundfläche ACB iſt, ſo muß auch EF mit CB, ferner DE mit AC, und endlich DF mit AB parallel ſeyn, folglich verhält ſich

GE zu GC, wie EF zu CB (§. 495.),

und da ſich verhält

GE zu GC, wie DE zu AC (§. 495.),

ſo folgt, daß ſich

EF verhalte zu CB, wie DE zu AC;

und

EF zu DE, wie CB zu AC (§. 432.).

Aus eben dem Grunde verhält ſich

GD zu GA, wie DE zu AC (§. 495.),

und da ſich verhält

GD zu GA, wie DF zu AB (§. 495.),

ſo folgt, daß ſich

DE verhalte zu AC, wie DF zu AB,

und

DE zu DF, wie AC zu AB (§. 432.).

Weil

Weil alſo die Seiten des Dreiecks DEF ſich eben ſo verhalten, wie die Seiten des Dreiecks ACB, ACB, ſo erhellt, daß das Dreieck DEF, welches durch den parallelen Schnitt entſtanden, dem Dreieck ACB, d. i. der Grundfläche der Pyramide ähnlich ſei (§. 505.).

§. 633. Da ſich alle übrigen **Pyramiden**, wie die **viereckichten Prismata**, in dreieckichte zergliedern laſſen, ſo iſt der körperliche Innhalt der vieleckichten Pyramiden ebenfalls der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe.

§. 634. Wenn man einen Kegel nach einer ebenen Fläche parallel mit der Grundfläche durchſchneidet, ſo muß z. B. durch den Schnitt GHI ein Cirkel entſtehen, welcher deſto größer ſeyn wird, je näher der Schnitt der Grundfläche des Kegels iſt. **Tab. 5. Fig. 63.** 19

§. 635. **Der körperliche Innhalt** eines Kegels läßt ſich finden, wenn man die Grundfläche in die Höhe multiplicirt, und diß Product durch 3 dividirt.

§. 636. Den Innhalt eines abgekürzten Kegels kann man finden, wenn man den abgeſchnittenen Theil eines Kegels aus den beeden Circularflächen, und aus der gegebenen Höhe des abgekürzten Kegels ſucht, und hernach den kleinen Kegel von dem Ganzen ſubtrahirt. **Tab. 5. Fig. 93.**

Es ſeien die beiden Halbmeſſer GH und CE gegeben, ſo weiß man auch ihre Differenz CD. Es ſei ferner die Höhe des abgekürzten Kegels DG oder EH gegeben, ſo findet man die Höhe EB des ganzen Kegels, weil CD zu DG ſich verhält, wie CE zu EB, (§. 496. 497.) und man findet auch die Höhe des kleinen Kegels BH gleich EB — HE, und alſo hieraus die ganzen Kegel, und ihre Differenz, den abgekürzten Kegel.

§. 637. Wenn man einen Cylinder mit einem Kegel, welcher einerlei Grundfläche und Höhe mit ihm hat, vergleicht, ſo erhellt, daß der Kegel der dritte Theil von einem ſolchen Cylinder ſeyn müſſe.

§. 638. Alle prismatiſchen Körper, ingleichem alle Cylinder, Pyramiden und Kegel verhalten ſich, wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich ſind; hingegen verhalten ſie ſich wie ihre Höhen, wenn ſie gleiche Grundflächen haben; denn die prismatiſchen Körper und Cylinder verhalten ſich wie die Producte aus ihren Höhen in ihre Grundflächen, und die Pyramiden und Kegel verhalten ſich, wie die Producte aus ihren Grundflächen und dem dritten Theil ihrer Höhen, mithin verhalten ſie ſich, wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich ſind, und wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich ſind.

Z. E. Die Höhe des einen Prisma ſei 5, die Höhe des andern ſei 8, und die Grundfläche von beiden ſei 6. Wenn man nun den Innhalt von dieſen beiden Prismatibus haben will, ſo multiplicire

plicire man bei dem erſten Prisma 5 durch 6, und bei dem andern Prisma 8 durch 6, ſo müſſen ſich beide Producte eben ſo gegen einander verhalten, wie ſich 5 und 8 vor der Multiplication gegen einander verhalten haben. Eben ſo iſt es auch bei den Pyramiden und Kegeln, weil ſich die Dritteln eben ſo gegen einander verhalten, wie die Ganzen.

§. 639. Weil die Grundflächen der Cylinder, Cirkel ſind, und die Cirkel ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer verhalten (§. 535.), ſo iſt klar, daß ſich die Cylinder wie die Quadrate der Durchmeſſer ihrer Grundflächen verhalten müſſen. Eben dieſes gilt auch von den Kegeln.

§. 640. Eine Halbkugel iſt zwey Drittel von einem Cylinder, deſſen Durchmeſſer dem Durchmeſſer der Halbkugel, und deſſen Höhe ihrem Halbmeſſer gleich iſt. Tab. 6. Fig. 103.

Es ſei BNCF ein Quadrat, BNF der vierte Theil eines Cirkels, und BNC ein rechtwinklichter Triangel. Man ſtelle ſich vor, daß ſich dieſe drei Figuren um die gemeinſchaftliche Seite BN bewegen, ſo muß durch die Bewegung des Quadrats ein Cylinder, durch die Bewegung des Quadranten eine Halbkugel, und durch die Bewegung des rechtwinklichten Triangels ein Kegel entſtehen. Da nun dieſe drei Körper einerlei Höhe haben, ſo erhellt, daß man aus dem einen eben ſo viel Stücke oder Scheiben durch Parallelſchnitte wird ſchneiden können, als aus dem andern und dritten, wenn man denſelben einerlei Dicke giebt. Man ſetze alſo, daß ſowohl der Cylinder, als auch der Kegel und die Halbkugel parallel mit den Grundflächen durchſchnitten würden, und die Schnitte

eine

eine undenklich kleine Entfernung von einander hätten, ſo müßten nicht nur der Cylinder, ſondern auch der Kegel und die Halbkugel dadurch in lauter kleine Scheiben oder Cylinder von einerlei Höhen zergliedert werden.

In vorbemerkter Figur ſind noch folgende Dinge zu bemerken:

1) PS = BF = BG iſt der Halbmeſſer der durch den Schnitt entſtandenen Cirkelfläche im Cylinder.

2) PG iſt der Halbmeſſer von dem Durchſchnitt in der Kugel.

3) PQ iſt der Halbmeſſer von dem Durchſchnitt in dem Kegel.

Weil man aber in dem Dreieck NBC ſagen kann: NB : NC = BP : PQ (§. 410. 415.), und BN gleich NC iſt, (weil ſie Seiten des Quadrats BNC ſind,) ſo iſt auch BP gleich PQ, und alſo kann man auch BP als den Halbmeſſer des Durchſchnitts im Kegel nehmen.

Da nun dieſe drei erſtbeſchriebene Halbmeſſer BG, PG und BP die Seiten des rechtwinklichten Dreiecks BPG ſind, ſo kann man auch ſagen, daß das Quadrat von PG (als dem Halbmeſſer des Durchſchnitts in der Kugel) mit dem Quadrat von BP (als dem Halbmeſſer des Durchſchnitts im Kegel) zuſammen genommen ſo groß ſei, wie das Quadrat von BG, (als dem Halbmeſſer des Durchſchnitts im Cylinder.) (§. 440.). Weil ſich aber die Cirkelflächen gegen einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer, oder auch wie die Quadrate ihrer Halbmeſſer, ſo ſind mithin die zwo Cirkelflächen, davon die eine mit PG und die ander mit BP beſchrieben worden, zuſammen genommen ſo groß, als die durch BG beſchriebene Cirkelfläche, d. i. die durch einerlei Schnitt entſtandenen Cirkelflächen des Kegels und der Kugel

zuſam-

zuſammen genommen ſind allezeit der Cirkelfläche des Cylinders gleich, und wenn man alſo die Cirkelfläche, oder den Durchſchnitt des Kegels, von dem Durchſchnitt des Cylinders abzieht, ſo bleibt der Durchſchnitt der Kugel übrig. Dieſer Beweis kann bei allen Durchſchnitten oder bei allen dünnen Scheiben, in welche man ſich dieſe Körper durch parallele Schnitte zertheilt vorſtellt, geführt werden, und es folgt dahero, daß, wenn man den ganzen Kegel, oder die Summe aller aus ihm geſchnittenen dünnen Scheiben, von dem ganzen Cylinder, oder der Summe aller ſeiner Scheiben abzieht, der Innhalt der halben Kugel, oder die Summe aller Scheiben, in die ſie zertheilt worden, übrig bleiben müſſe. Nun iſt aber der Kegel, wie oben geſagt, $\frac{1}{3}$ vom Cylinder, mithin bleibt für die halbe Kugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder übrig.

§. 641. Es iſt alſo die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, deſſen Höhe noch einmal ſo groß, als die Höhe des vorigen, (§. 640.) d. i. deſſen Höhe und Durchmeſſer dem Durchmeſſer der Kugel gleich iſt. Tab. 5. Fig. 95.

§. 642. Man kann daher den körperlichen Innhalt einer Kugel finden, wenn man den körperlichen Innhalt eines Cylinders ſucht, deſſen Höhe und Durchmeſſer dem Durchmeſſer der Kugel gleich iſt, und davon $\frac{2}{3}$ nimmt. Der Durchmeſſer einer Kugel und des Cylinders, wovon die Kugel $\frac{2}{3}$ ſeyn ſoll, heiſſe d; und die Peripherie der Kugel, und folglich auch die Peripherie der Grundfläche dieſes Cylinders, heiſſe p, ſo wird der Innhalt der erſtbeſagten cylindriſchen Grund-

fläche

fläche dardurch gefunden, wenn man mit dem vierten Theil des Durchmeſſers, (d. i. $\frac{1}{4}$ d) die Peripherie (d. i. p.) multiplicirt, und alſo $\frac{1}{4}$ dp bekommt, (§. 534.) und weil die Höhe des Cylinders dem Durchmeſſer der cylindriſchen Grundfläche gleich, und alſo ebenfalls d iſt, ſo wird das obige Product $\frac{1}{4}$ dp noch einmal mit d multiplicirt, und diß gibt ſodann $\frac{1}{4}$ dpd $= \frac{1}{4}$ pd², welches der körperliche Innhalt des Cylinders iſt. (§. 360.) Der dritte Theil von $\frac{1}{4}$ pd ² iſt $\frac{1}{12}$ pd², und folglich $\frac{2}{3}$ davon, nemlich $\frac{2}{12}$ pd², $= \frac{1}{6}$ pd², der Innhalt der Kugel. Hieraus läßt ſich die Regel folgern, daß man den körperlichen Innhalt einer Kugel ausrechnen könne, wenn man das Quadrat ihres Durchmeſſers d² in die Peripherie p multiplicirt, und dieſes Product durch 6 dividirt.

Es ſei z. E. d, d. i. der Durchmeſſer einer Kugel, 100 Zoll, ſo iſt p, oder die Peripherie derſelben, 314 Zoll, (§. 532.) und daher der körperliche Innhalt $\frac{314 \times 100^2}{6} = \frac{3140000}{6} = 523333\frac{1}{3}$ Cubikzolle.

§. 643. Stellt man ſich vor, daß die Oberfläche der Kugel in undenklich kleine Theile, z. E. in lauter kleine Vierecke eingetheilt ſei, ſo wird man dieſe kleine Theile der Oberfläche für ebene Flächen anſehen können, und wenn man von den Ecken dieſer kleinen Vierecke ſich gerade Linien gegen den Mittelpunct der Kugel gedenkt, ſo bekommt

kommt man ſo viele kleine viereckichte Pyramiden, als Vierecke auf der Oberfläche der Kugel gezeichnet ſind. Dieſe kleinen Pyramiden ſtoſſen mit ihren Spitzen in dem Mittelpunct der Kugel zuſammen, und ihre viereckichten Grundflächen machen miteinander die Oberfläche der Kugel aus, ihre Höhe aber iſt von dem Halbmeſſer der Kugel nicht merklich unterſchieden. Die Summe aller dieſer kleinen Pyramiden gibt den Innhalt der Kugel. Ein ſolches undenklich kleines Viereck, welches auf der Oberfläche der Kugel angenommen wird, heiſſe g; die Anzahl derſelben ſei n, und die Oberfläche der Kugel nenne man S, ſo iſt $g \times n = S$. Der Halbmeſſer der Kugel, und alſo die Höhe der kleinen viereckichten Pyramiden, die zuſammen genommen die ganze Kugel ausmachen, heiſſe r, ſo iſt der körperliche Innhalt einer ſolchen Pyramide, (weil g die Grundfläche bedeutet,) $\frac{1}{3} r \times g$; (§ 632.) und (weil n die Anzahl ſolcher kleinen Theile vorſtellt,) ſo iſt die Summe aller dieſer Pyramiden, folglich der Innhalt der Kugel

$$\frac{1}{3} r \times g \times n, \text{ d. i. } \frac{1}{3} r \times S,$$

weil, vermöge der angenommenen Bedingung, $g \times n$ gleich S iſt.

§. 648. Hieraus erhellt, daß man auch den Innhalt der Kugel findet, wenn man den dritten Theil des Halbmeſſers in die Oberfläche derſelben multiplicirt. Weil nun der Halbmeſſer die

Helfte

Helfte des Durchmeſſers, und folglich $\frac{1}{3}$ des Halbmeſſers $\frac{1}{6}$ des Durchmeſſers iſt, ſo kann man dieſen Satz auch ſo ausdrücken: das Product aus der Oberfläche der Kugel in den 6ten Theil des Durchmeſſers, oder der 6te Theil des Products aus der Oberfläche in den Durchmeſſer der Kugel iſt der körperliche Innhalt derſelben. Nennt man den Durchmeſſer, wie oben, d, ſo iſt $\frac{1}{3}$ rS $=$ $\frac{1}{6}$ dS, Tab. 5. Fig. 95.

Man kann alſo auch ſagen, daß die Kugel einer Pyramide gleich, deren Grundfläche der ganzen Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Halbmeſſer eben dieſer Kugel gleich iſt.

§. 645. Aus dem Vorhergehenden (§. 643.) läßt ſich einſehen, wie man die **Oberfläche der Kugel berechnen könne.** Denn da (nach §. 642.) der Innhalt der Kugel durch das Product $\frac{1}{6}$ pd², und (nach §. 644.) auch durch das Product $\frac{1}{6}$ dS ausgedrückt werden kann, ſo folgt hieraus, (weil der Buchſtabe d einerlei Bedeutung hat,) daß

$$\frac{1}{6}\,pd^2 = \frac{1}{6}\,dS,\ (§.91.\ I.)$$

$$6 \times \frac{1}{6}\,pd^2 = 6 \times \frac{1}{6}\,dS,\ (§.91.\ V.)$$

d. i. $pd^2 = dS$

$$\frac{pd^2}{d} = \frac{dS}{d}\ (§.91.\ VI.)$$

d. i. $pd = S.$ (§. 54.)

D. i. weil d den Durchmeſſer, p die Peripherie, und g die Oberfläche der Kugel bedeutet, ſo gibt

gibt ein Product aus dem Durchmeſſer in die Peripherie, die Oberfläche der Kugel.

Oder, wenn man den gefundenen Innhalt der Kugel durch den dritten Theil des Halbmeſſers dividirt, ſo kommt die Oberfläche der Kugel heraus. Tab. 5. Fig. 95.

§. 646. **Da der gröſste Cirkel einer Kugel mit** ihr einerlei Mittelpunct und Durchmeſſer, (§. 581.) folglich auch einerlei Peripherie hat, ſo können die Buchſtaben d und p auch den Durchmeſſer und die Peripherie des gröſsten Cirkels bedeuten. Das Product $\frac{1}{4}$ pd wird alſo die Fläche des gröſsten Cirkels vorſtellen. (§. 581. 641.) Nun war die Oberfläche der Kugel pd d. i. S. (§. 645.) Da nun pd viermal mehr beträgt, als $\frac{1}{4}$ pd, ſo iſt klar, daſs die Oberfläche der Kugel viermal gröſser iſt, als die Fläche des gröſsten Cirkels.

§. 647. **Die Oberfläche der Kugel** und der körperliche Innhalt derſelben kann alſo leicht berechnet werden, wenn man nur den Durchmeſſer gemeſſen hat; der Durchmeſſer einer Kugel aber ſei 50 Schuh. Man ſuche nun zuerſt die Peripherie 100 : 314 = 50′ Periph.

50

~~157~~ | 00 | 157′ = Periph.
~~100~~ | 00 |

Beträgt nun die Peripherie 157 Schuh, ſo belauft ſich die Oberfläche der Kugel auf 157 Schuh ✕ 50 Schuh, d. i. 7850 Quadratſchuh. (§. 643. 645.)

Dieſe 7850 □′ multiplicire man durch den 6ten Theil von 50, (§. 644.) oder durch 50, und dividire das Product mit 6, ſo zeigt der Quotient die Cubikſchuh an, welche eine Kugel, deren Durchmeſſer 50 Schuh lang iſt, (§. 589.) enthält.

Z. E. 7850 □′
50′

3214(4
39250 0 | $65416\frac{4}{6} = 65416\frac{2}{3}$
6666 6 | Cubikſchuh.

§. 648. Gibt man dem Durchmeſſer 100 Theile, ſo iſt der körperliche Innhalt der Kugel $523333\frac{1}{3}$. (§. 584.) Wenn man ſich einen Würfel vorſtellt, deſſen Seite ſo groß iſt, wie der Durchmeſſer der Kugel, und folglich ebenfalls 100 Theile enthält, ſo iſt der körperliche Inhalt deſſelben $100 \times 100 \times 100$, d. i. 1000000. (§. 625.) Nennt man nun die Kugel K, und den Würfel (welcher hier nichts anders, als die Cubikzahl des Durchmeſſers iſt,) d^3, ſo verhält ſich

K zu d^3, wie $523333\frac{1}{3}$: 1000000;
da aber
K ſich verhält zu d^3, wie $523333\frac{1}{3} \times 3$ zu 1000000×3 (§. 131. 152.)
oder welches einerlei iſt, da
K ſich verhält zu d^3, wie 1570000 zu 3000000,
ſo verhält ſich
K zu d^3, wie $\frac{1570000}{10000}$ zu $\frac{3000000}{10000}$ (§. 131. 152.)
oder
K verhält ſich zu d^3, wie 157 zu 300. (§. 152.)

Nem-

Nemlich, es verhält ſich die Kugel zu dem Würfel des Durchmeſſers, oder (welches einerlei) der körperliche Innhalt der Kugel zu der Cubikzahl des Durchmeſſers, wie 157 zu 300. Da aber dieſe Verhältniß ſich auf die Verhältniß 100 : 314 (§. 529. 532.) gründet, ſo kann ſie auch nicht für ganz vollkommen richtig gehalten werden.

§. 649. Der körperliche Innhalt einer Kugel läßt ſich durch Hülfe der vorigen Verhältniß (157 : 300) noch auf eine andere Art ausrechnen. Verhält ſich die Kugel zu dem Würfel des Durchmeſſers, wie 157 zu 300, ſo muß ſich umgekehrt 300 zu 157, wie die Cubikzahl des Durchmeſſers zu dem Innhalt der Kugel verhalten. Man kann demnach durch Hülfe der Regel de Tri den körperlichen Innhalt der Kugel finden, wenn man zu 300, 157 und der Cubikzahl des Durchmeſſers die vierte Proportionalzahl ſucht.

Der Durchmeſſer einer Kugel ſei 50′. (§. 647.) Von dieſem Durchmeſſer ſuche man die Cubikzahl, d. i. 50^3 oder 50 ⋈ 50 ⋈ 50.

50′
50
2500
50
c′
125000

Nun ſchlieſſe man

$300 : 157 = 125000^{c'}$: Innh. der Kugel.

```
   1250
 -------
   7850
  314
 157
 -------
 11 2(2 |
 19028 0|  65416⅔ c′ = Innh. der Kugel.
 3333 3 |              (§.637.)
```

§. 650. Aus dem gegebenen Innhalt einer Kugel läßt ſich ihr Durchmeſſer finden. (§. 645. 651.) **Tab. 5. Fig. 95.**

Der Innhalt einer Kugel ſei $91905706\frac{2}{3}$ Cubikzoll, ſo muß die vierte Proportionalzahl, welche zu 157, 300 und $91905706\frac{2}{3}$ Cubikzollen gefunden wird, die Cubikzahl des Durchmeſſers, (§. 651.) und daher die Cubikwurzel aus dieſer vierten Proportionalzahl der Durchmeſſer ſelbſt ſeyn. (§.625.) Man kann alſo aus dem gegebenen Innhalt einer Kugel den Durchmeſſer finden, wenn man denſelben durch 300 multiplicirt, alsdenn dieſes Product durch 157 dividirt, und aus dem Quotienten die Cubikwurzel ſucht. Bei dem gegenwärtigen Exempel iſt die vierte Proportionalzahl, d.i. die Cubikzahl des Durchmeſſers, $175616000^{c'}$: wenn man nun hieraus die Cubikwurzel zieht, ſo bekommt man 560″, oder 56′, welches der Durchmeſſer der gegebenen Kugel iſt.

§. 651.

§. 651. Die Kugeln verhalten ſich gegen einander, wie die Würfel, oder wie die Cubikzahlen ihrer Durchmeſſer.

Die eine Kugel verhält ſich zu der Cubikzahl ihres Durchmeſſers eben ſo, wie ſich die andere zu der Cubikzahl ihres Durchmeſſers verhält, nemlich, das Verhältniß iſt in allen Fällen, wie beinahe 157 zu 300, (§. 651.) und alſo verhält ſich auch die eine Kugel zu der andern, wie die Cubikzahl des Durchmeſſers der einen ſich zur Cubikzahl des Durchmeſſers der andern verhält.

Iſt z. E. der Durchmeſſer der einen Kugel, 2, und der Durchmeſſer der andern Kugel, 3, ſo verhält ſich die erſtere Kugel zur andern, wie 8 zu 27, weil 8 und 27 die Cubikzahlen von 2 und 3 ſind.

§. 652. Die Ausmeſſung eines körperlichen Raums geſchieht nicht immer durch Würfel, (§. 620.) ſondern oftmals durch cylindriſche Gefäſſe. Dieſe letztere Art von Ausmeſſung findet ſtatt, wenn man ohne weitläufige Rechnung wiſſen will, wie viel Kannen in einem Faſſe Raum haben.

§. 653. Die Ausmeſſung eines Faſſes durch cylindriſche Gefäße nennt man Viſiren. Tab. 6. Fig. 105.

§. 654. Der Maasſtab, deſſen man ſich zum Viſiren bedient, heißt Viſirſtab. Tab. 6. Fig. 104.

§. 655. Die Verfertigung eines Viſirſtabs geſchicht auf folgende Art:

Man trägt erſtlich auf beide Schenkel eines rechten Winkels, z. E. des Winkels B den Durchmeſſer eines nicht allzuhohen, vollkommen cylindriſchen Gefäſſes, welches genau eine Kanne, oder ſonſt gewöhnliches Maas in ſich faßt, und macht alſo BA = BC ſo groß, als dieſen Durchmeſſer. Zieht man nun die Hypotenuſe AC, ſo hat man den Durchmeſſer eines zweikannigen Gefäſſes von eben der Höhe, weil Cylinder, die gleichen Höhen haben, ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer verhalten, (§. 535.) und weil das Quadrat von AC ſo groß iſt, als das Quadrat von AB, und das Quadrat von BC zuſammen genommen. (§. 440.) Macht man alſo BD = AC, und zieht die Hypotenuſe AD, ſo hat man den Durchmeſſer eines dreikannigen Gefäſſes, welches mit dem einkannigen gleiche Höhe hat. Macht man ferner BF = AD, ſo iſt AF der Durchmeſſer eines vierkannigten Gefäſſes, welchen man aus B in G trägt, und auf dieſe Weiſe erhält man die Durchmeſſer von 5- 6- 7 kannigten u. ſ. w. Gefäſſen; in welchen allen einerlei Höhe, nemlich die Höhe des cylindriſchen Gefäſſes von einer Kanne angenommen wird. Eine ſolche Linie BQ nun, worauf die Durchmeſſer durch die Puncte C, D, F, G, N, Q gezeichnet ſind, wie die Figur weißt, trägt man auf die eine Seite eines prismatiſchen Stabs, den man von hartem Holz oder Elfenbein machen läßt, und ſchreibt die Zahlen, wie in der Figur, dazu, damit man ſehen könne, was für ein Durchmeſſer durch jeden Punct bedeutet werde. Trägt man auf die andere Seite des Stabs die Höhe des cylindriſchen Gefäſſes auf eine gerade Linie ſo vielmal, als es die Länge des Stabs erlaubt, ſo iſt der Viſirſtab fertig. Mit derjenigen Seite dieſes Viſirſtabs nun, auf welcher ſich die Durchmeſſer befinden, mißt man den Durchmeſſer von der Grundfläche des cylindriſchen Gefäſſes, deſſen Innhalt man wiſſen will, damit man

ſehe,

ſehe, wie viel Kannen auf der Grundfläche des Cylinders neben einander ſtehen können. Mißt man aber mit der andern Seite, welche die Höhen des Kannenmaſes enthält, die Länge, oder die Höhe des auszumeſſenden Cylinders, ſo erfährt man dardurch, wie vielmal die Anzahl der Kannen, die auf der Grundfläche neben einander Raum haben, über einander ſtehen können. Tab. 6. Fig. 104.

Es gibt noch eine andere Art, Viſirſtäbe zu verfertigen, welche hier anzuführen, zu weitläufig wäre.

§. 656. Die Fäſſer, zu deren Ausmeſſung man den Viſirſtab gebraucht, ſind zwar nicht vollkommene Cylinder, indem der Durchmeſſer des Bodens viel kleiner iſt, als der Durchmeſſer des Bauchs. Man hat aber durch die Erfahrung gefunden, daß der Fehler ſehr unbeträchtlich iſt, wenn man ein gewöhnliches Faß einem Cylinder gleich ſchätzt, deſſen Höhe mit der Länge des Faſſes übereinkommt, und deſſen Durchmeſſer die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen dem Durchmeſſer des Bodens und dem Durchmeſſer des Bauchs, iſt. Sollte man alſo z. E. das Faß BCNSM viſiren, deſſen Innhalt weniger, als des Cylinders PAFR, und mehr, als des Cylinders BCSM betragen muß, ſo meſſe man erſtlich mit derjenigen Seite des Viſirſtabs, welcher die Durchmeſſer enthält, ſowohl den Durchmeſſer NB durch das Spundloch, als auch den Durchmeſſer CB am Boden, und

geſetzt, daß NB 17 und CB 13 wäre, ſo addire man, um die mittlere, arithmetiſche Proportionalzahl zu finden, dieſe beiden Zahlen, und dividire die herauskommende Summe 30 durch 2, welches 15 gibt. Mit der andern Seite des Viſirſtabs, worauf die Höhen des cylindriſchen Kannengefäſſes gezeichnet ſind, meſſe man die Länge des Faſſes CS, und wenn z. E. dieſe Länge auf dem Viſirſtab 20 wäre, ſo multiplicire man damit die obige Zahl 15, welches 300 Kannen, als den Innhalt des Faſſes gibt. Tab. 6. Fig. 105.

Zweiter Abſchnitt.

Von der praktiſchen Geometrie.

§. 657. Um die bißherigen Lehren auf die praktiſche Geometrie, ſo viel es der Raum und die Abſicht dieſer Schrift erlaubt, anzuwenden, und jungen Wundärzten zugleich den Nutzen anſchaulicher zu machen, den die bisher erklärten geometriſchen Sätze, auſſer der Hauptabſicht auf das chirurgiſche Studium, auch im gemeinen Leben äuſſern, das manchen Landwundarzt auſſer ſeinem Hauptberuf noch zum Feldmeſſer beſtimmt, werden folgende Paragraphen nicht überflüßig ſeyn.

§. 658. Wenn man gerade Linien meſſen will, ſo nehme man ein Maas an, das man einen Fuß nennt. Zehen Fuſſe machen eine Ruthe; der zehnte

te Theil eines Fuſſes aber einen Zoll, und der zehnte Theil des Zolls eine Linie. Bisweilen theilt man auch die Linie noch aufs neue in 10 gleiche Theile, welche man Scrupel zu nennen pflegt; die Ruthen werden mit o, die Fuſſe mit ', die Zolle mit '', die Linien mit ''', die Scrupel durch '''' bezeichnet. So werden z. E. $53^{o}\ 4'\ 7''\ 8'''\ 9''''$ durch 53 Ruthen, 4 Fuß, 7 Zoll, 8 Linien, 9 Scrupel ausgedrückt. Man kann auch, wenn man z. E. lauter Scrupel haben will, ſagen: fünf hundert vier und dreißig tauſend ſieben hundert und neun und achtzig Scrupel. Dieſe Bequemlichkeit hat die Feldmeſſer veranlaßt, die Decimaltheilung zu gebrauchen.

§. 659. Dieſe Eintheilung in 10 Theile iſt eigentlich die mathematiſche. Da aber an verſchiedenen Orten auch eine andere Eintheilung gewöhnlich iſt, ſo verſteht ſich von ſelbſt, daß man ſich die Eintheilung des Maaſes bekannt mache, nach welchem man meſſen ſoll. So wird z. E. der Pariſer Fuß in 12 Zolle, und jeder Zoll in 12 Linien, und jede Linie noch weiter in 10 Theile getheilt; es hält alſo der Pariſerfuß $1 \times 12 \times 12 \times 10$, d. i. 1440 ſolcher Theile.

§. 660. Auſſer dem erſt gedachten Pariſerfuß, der faſt überall bekannt iſt, hat man auch noch den Rheinländiſchen und Londnerfuß zu bemerken;

den erſten, weil er hin und wieder in Teutſchland, wie auch in Dänemark eingeführt iſt, und den andern, weil er in mathematiſchen Rechnungen von den engliſchen Scribenten gebraucht wird.

§. 661. Ein Maaßſtab, durch welchen ſich die Längenmaaſe im Kleinen vorſtellen laſſen, heißt ein **verjüngter Maasſtab**. Tab. 4. Fig. 77.

§. 662. Die Verzeichnung des verjüngten Maasſtabs für das zehentheiliche Maas iſt folgende:

Man trage auf eine unbeſtimmte Linie zehen willkührlich angenommene Theile, ſo, daß die daraus entſtehende Linie AB zehen ſolche gleiche Linien, wie N und B, enthält.

Die Linie AB ſelbſt trage man ferner ſo oft auf die Linie AC, als es die Länge derſelben erlaubt. An die Endpuncte A, B und C errichte man ſenkrechte Linien von unbeſtimmter Länge, und trage auf die eine derſelben, z. E. auf PA oder SB, ebenfalls zehen willkührlich angenommene gleiche Theile, und ziehe dnrch die Theilungspunkte a, b, c, d u. ſ. w. gerade Linien, die mit AC parallel ſind. Auf die oberſte dieſer Linien PQ trage man ferner die Theile der unterſten Linien AC, ſo, daß S 1 = NB u. ſ. w. werde. Endlich ziehe man noch die Linien SN u. ſ. f. ſo iſt der verjüngte Maaßſtab fertig. Läßt man nun die Linie AB eine Ruthe bedeuten, ſo wird NB oder S einen Schuh, qa einen Zoll, rb zween Zoll, gc drei Zoll, nd vier Zoll, fe fünf Zoll u. ſ. f. bedeuten. Denn, weil, vermöge der Conſtruction, qa parallel mit NB iſt, ſo verhält ſich Sa zu qa, wie SB zu NB (§. 495.)

und

und verſetzt, verhält ſich

Sa zu SB, wie qa zu NB, (§. 238.)

da nun

Sa zu SB ſich verhält, wie 1 zu 10, ſo verhält ſich qa zu NB, wie 1 zu 10.

Auf eben dieſe Art iſt auch klar, daß rb zween Zoll vorſtellt, wenn NB 1 Schuh, d. i. 10 Zoll bedeutet, oder welches einerlei iſt, daß rb ſich zu NB verhält, wie 2 zu 10. Denn, weil auch rb mit NB parallel gezogen worden, ſo iſt der Triangel Srb dem Triangel SNB ähnlich, (§. 495.) und daher verhält ſich

Sb zu rb, wie SB zu NB,

und verſetzt

Sb zu SB, wie rb zu NB, (§. 238.)

und da

Sb zu SB ſich verhält, wie 2 zu 10, ſo verhält ſich rb zu NB wie 2 zu 10.

Wollte man den verjüngten Maasſtab nach einer andern Eintheilung der Ruthen, Schuhe u. ſ. w. einrichten, z. E. nach dem ſogenannten Duodecimalmaaſſe, nach welchem die Ruthe in 12 Schuhe, der Schuh in 12 Zoll u. ſ. w. getheilt wird, ſo müßte man auf die Linien AB und AP nicht 10, ſondern 12 gleiche Theile tragen.

Will man auf dieſem verjüngten Maasſtab 5 Schuhe nehmen, ſo ſetze man den Cirkel in den Punct S, und öfne ihn auf der nemlichen Linie biß in 5. Will man 4 Schuh und 3 Zoll nehmen, ſo ſetze man den Zirkel in den Punct c, und öfne ihn auf dieſer Linie biß in den Punct, wo ſie durch diejenige Linie, die oben mit 4 bezeichnet iſt, durchſchnitten wird. Soll man eine Ruthe, 3 Schuh

3 Schuh und 2 Zoll nehmen, ſo ſetze man den Zirkel auf QC, und zwar auf den Punct, den die dritte Querlinie von oben berührt, und öfne ihn auf dieſer Querlinie biß dahin, wo ſie von der, oben mit 3 bezeichneten Linie durchſchnitten wird.

§. 663. Wenn man Weiten und Höhen meſſen ſoll, die ſich nicht unmittelbar meſſen laſſen, ſo ſtelle man ſich die gerade Linie, wodurch die Entfernung oder Höhe eines Orts beſtimmt wird, als die Seite eines Triangels vor, und ſuche von dieſem Triangel ſo viel zu finden, als hinlänglich iſt, um einen gleichen oder ähnlichen Triangel zu machen (§. 375. 379. 384. 409. 501. 503. 505.). Alſo auf der Lehre von gleichen und ähnlichen Dreiecken beruht die ganze Feldmeßkunſt.

§. 664. Auf dem Felde pflegt man ſich die Puncte durch Stäbe vorzuſtellen, die man ſenkrecht in die Erde ſteckt, wofern nicht ſchon an dem Ort, wo das Ende einer Linie ſeyn ſoll, ein Baum oder anders Merkmal ſich befindet. Die geraden Linien, welche nicht zu lang ſind, beſtimmt man durch zween Stäbe, die man an ihre Endpuncte ſetzt. Bei langen Linien aber pflegt man auch in der Mitte noch einige Stäbe einzuſtecken. Man kann aber leicht ſehen, ob ein mittlerer Stab mit den beiden äuſſerſten, welche die Endpuncte vorſtellen, in gerader Linie ſteht, wenn man mit einem Aug von dem einen äuſſerſten Stab gegen den andern zu ſieht,

und

und Achtung gibt, ob alle mittlere Stäbe dadurch verdeckt werden.

§. 665. Zur unmittelbaren Meſſung der Linien auf dem Felde bedient man ſich entweder einer Kette, Stange, oder Schnur, welche in Ruthen und Schuh eingetheilt ſind. Bei den Schnuren iſt nur diß zu merken, daß ſie von der Feuchtigkeit der Luft viel kürzer und von der Trockenheit derſelben viel länger werden, wofern ſie nicht zuvor in Leinöl geſotten, und durch und durch mit Wachs getränkt worden ſind.

§. 666. Durch Hülfe einer Schnur oder Kette läßt ſich leicht ein Winkel auf dem Felde an jedem Punct einer gegebenen Linie tragen, wenn man das auf dem Felde thut, was (§. 414.) auf dem Papier zu machen vorgeſchrieben worden.

Es ſei r ein Winkel auf dem Feld, und R ein gegebener Punct einer geraden Linie, an welchen der Winkel r geſetzt werden ſoll. Man erwähle ſich auf den Schenkeln des Winkels r zween beliebige Puncte, wie a und q, meſſe erſtlich die Linie rq und mache RQ = rq, alsdenn meſſe man auch ra und aq, und mache ſich eine Schnur, die ſo groß iſt, als beide Linien zuſammen genommen, doch ſo, daß man ſich den Punct a, welcher der Endpunct von ra iſt, durch ein Merkmal an der Schnur bezeichnet. Die beiden Ende dieſer Schnur ſtecke man an die Puncte R und Q, dehne ſie alsdenn an dem Punct a aus, und ſtecke an den Ort, wo dieſer Punct hintrift, einen Stab, ſo muß der Winkel R, welchen die Linien RA und QR mit einander machen,

chen, dem Winkel r vollkommen gleich (§. 385.). Tab. 3. Fig. 57.

§. 667. Eine **Weite** AB läßt ſich meſſen, wenn man zu beeden Endpuncten auch nur von einem dritten Stand C kommen kann. Tab. 4. Fig. 78.

Man meſſe CA und CB, und trage dieſe Längen auf die rückwärts verlängerte Linien in a und b, daß ACa und BCb gerade Linien werden, und Ca gleich CA, und Cb gleich CB werde, ſo iſt ab gleich AB. (§. 375. 396.)

§. 668. Eine **Weite** AB läßt ſich meſſen, wenn man vom Stand C nur zu einem Endpunct A, nicht aber zum andern Endpunct kommen kann. Tab. 4. Fig. 78.

Man trage CA zurück in Ca, und an a den Winkel CaP = CAB; (§. 410.) alsdann gehe man in der Linie aP fort, bis man zugleich in BC kommt, der Punct b, wo man ſich alsdann befindet, gilt ab = AB. (§. 379.)

Um die gerade Linie AB genauer zu beſtimmen, kann man zwiſchen A und B, ſo weit es die dazwiſchen liegende Hinderniß erlaubt, einen Stab einſtecken, ſo, daß A, der Stab, und B einander decken; (§. 518.) damit man dardurch den Winkel genau abnehmen könne. Sollte aber A zu nahe an der Hinderniß liegen, (dieſe ſei entweder ein Haus, Baum, oder See u. ſ. w.) ſo kann man die Linie BA ſeitwärts etwas verlängern, und alsdenn, wenn man ab gefunden hat, ſoviel, als die Verlängerung beträgt, wieder abziehen.

§. 679. Eine Weite AB läßt ſich meſſen, wenn man von C weder nach A noch nach B kommen kann. Tab. 4. Fig. 78.

Man nehme ſeitwärts von A einen Stand, von dem man nach C kommen kann, ſo kann man nach der Anweiſung, die bei §. 522. gegeben worden, AC finden. Eben ſo findet man auch CB, wenn man nemlich ſeitwärts von B einen Stand nimmt, aus dem man nach C kommen kann. Trägt man dieſe beiden Linien obenbeſagtermaſſen zurück, (§. 521.) ſo iſt ab = AB.

§. 670. Das bisher erwähnte Feldmeſſen heißt man mit bloſen Stäben, oder ohne Inſtrumente. Zu dem Feldmeſſen mit Inſtrumenten aber gehören, auſſen den ſchon benannten, nemlich dem Lineal, Zirkel und verjüngten Maasſtab, noch der Transporteur, das Aſtrolabium und das Meßtiſchlein, als die vorzüglichſten Inſtrumente.

§. 671. Der Transporteur beſteht aus einem halben Cirkel, deſſen Peripherie in 180 Grade getheilt iſt; an dem Durchmeſſer aber iſt der Mittelpunct durch einen ſcharfen Einſchnitt bemerkt. Tab. 5. Fig. 79.

§. 672. Das Aſtrolabium, oder der größere Winkelmeſſer beſteht aus einem halben (oder auch wohl ganzen) Zirkel, der gehörig in Grade eingetheilt iſt. An dem Mittelpunct iſt ein beweglich Lineal, an welchem Dioptern befindlich ſind. Tab. 5. Fig. 80.

Unter

Unter Dioptern verſteht man diejenige Theile der Inſtrumente, wodurch man auf einen gewiſſen Punct in einer geraden Linie zielt. In den gemeinen geometriſchen Inſtrumenten beſtehen ſie aus zwei ſchmalen und etwas hohen Blechen, die beide in der Mitte einen ſubtilen Spalt haben, oder wovon eins mit Löchlein verſehen iſt.

§. 673. Wenn man einen Winkel auf dem Papier meſſen will, ſo lege man den Mittelpunct des Transporteurs, (d. i. den Theil deſſelben, der mit einem ſcharfen Einſchnitt bezeichnet iſt,) an den Scheitel des Winkels B, und rücke das Inſtrument ſo lang, biß deſſen innere Schärfe an die Linie BC anſtößt. Alsdenn zähle man die Grade an dem Bogen GH, welche zwiſchen die Schenkel des Winkels BF und BC fallen, ſo weiß man die Größe des Winkels. Tab. 5. Fig. 79.

§. 674. Wenn man einen Winkel auf dem Feld meſſen will, ſo richte man das Aſtrolabium ſo, daß der Durchmeſſer CD auf den einen Schenkel des Winkels falle, verſchiebe das an dem Mittelpunct E bewegliche Lineal FG, und ziele durch die Dioptern des Lineals auf demſelben, biß man das Ende des andern Schenkels erblickt, zähle alsdenn die Grade CG, welche das Lineal auf dem Inſtrument abſchneidet, ſo weiß man die Größe des Winkels. Tab. 5. Fig. 80.

§. 675. Das **Meßtiſchlein** iſt ein viereckigt Brett, darüber weiß Papier geſpannt iſt; es ruht

auf

auf einem Geſtelle, das man Stativ nennt, und kann mit einem Lineal verſehen werden, welches Dioptern hat.

§. 676. Wenn man ſich nach Beſchaffenheit der Umſtände auf dem Meßtiſchlein einen Punct erwählt, das Lineal an dieſen Punct legt, und durch die Dioptern deſſelben nach einem gewiſſen Gegenſtand hinſieht, ſo kann man an dieſem Lineal auf dem Meßtiſchlein eine Linie ziehen, welche von dem angenommenen Punct genau nach dem Gegenſtand, auf den man geſehen hat, hingeht. Dreht man nun das Lineal um dieſen Punct herum, oder ſchaut nach einem andern Gegenſtand, ſo kann man abermals auf die nemliche Art eine Linie ziehen, und man bekommt alſo dadurch einen Winkel, deſſen Spitze der angenommene Punct iſt, und in deſſen Schenkeln die beiden Gegenſtände liegen.

§. 677. Schon aus den vorigen wenigen Aufgaben, die Meſſung einer Weite betreffend, (§ 521. 522. 523.) iſt abzunehmen, daß man die Weite zweener Oerter als die Seite eines gewiſſen angenommenen Dreiecks betrachte, und man alſo von dieſem Dreieck nach Beſchaffenheit der Umſtände ſo viele Stücke nehmen müſſe, als nach den Sätzen von gleichen und ähnlichen Dreiecken nöthig ſind, um eben ein ſolches Dreieck nachmachen zu können, damit man alsdenn in dieſem

neuen Dreieck die Seite zu meſſen im Stande ſeyn möge, welche man in dem erſtern Dreieck zu meſſen verhindert wurde.

§. 678. Will man aber ein gewiſſes Dreieck nicht ſo nachzeichnen, daß das Nachgemachte dem erſtern gleich und ähnlich, und alſo eben ſo groß, wie daſſelbe werde, ſondern man begnügt ſich damit, daß das Nachgemachte dem andern nur ähnlich ſei, ſo verfährt man in dieſem Fall nach der Vorſchrift der Sätze, welche von der Aehnlichkeit der Dreiecke handeln (§. 499—503.).

§. 679. Will man ein kleines Dreieck zeichnen, welches einem gewiſſen großen Dreieck ähnlich iſt, ſo mißt man, nach Beſchaffenheit der Umſtände, an dieſem großen Dreieck diejenigen Stücke, welche nach dem Innhalt erſtgedachter Sätze zur Aehnlichkeit erforderlich ſind, und zeichnet das Dreieck im Kleinen. Iſt es der Fall, wie §. 503. und man hat in dem großen Dreieck BAC (Tab. 4. Fig. 73.) zwo Seiten BA und BC, und den Winkel B, den ſie einſchlieſſen, gemeſſen, ſo macht man in dem kleinen Dreieck den Winkel b durch Hülfe des Transporteurs eben ſo groß, als er in dem großen Dreieck iſt, und einer jeden der beiden Seiten ab und bc, welche erſtgedachten Winkel einſchlieſſen, gibt man im Kleinen durch das Maas, das man von einem verjüngten Maasſtab genommen hat, und in der nemlichen Ordnung,

nung, eben die Länge, welche die beiden Seiten in dem großen Dreieck haben, die man nach einem gewiſſen großen Maasſtab genommen hat, und zieht alsdenn die dritte Seite, welche durch die Endpuncte a und c der vorigen beiden Seiten beſtimmt wird, ſo bekommt man ein Dreieck, das dem großen Dreieck ähnlich iſt.

§. 680. Eben ſo kann man auch ein großes Dreieck zeichnen, welches einem kleinen Dreieck ähnlich iſt, wenn man nemlich umgekehrt den Seiten des großen Dreiecks nach einem groſſen Maasſtab eben die Länge gibt, welche die Seiten des kleinen Dreiecks nach dem verjüngten Maasſtab haben.

§. 681. Da ſich nun alle geradlinichte Figuren in Dreiecke theilen laſſen, ſo ſieht man leicht ein, wie ſie nachzuzeichnen ſind, und zwar, daß ſie entweder vollkommen gleich und ähnlich, oder daß ſie nur ähnlich werden. Dann wenn man alle Dreiecke in der Zeichnung den Dreiecken in der gegebenen Figur, ſo, wie ſie in der Ordnung auf einander folgen, gleich und ähnlich macht, und eben ſo an einander ſetzt, ſo ſind beide, nemlich die gegebene und gezeichnete Figur, einander gleich und ähnlich. Macht man aber die Dreiecke in der Zeichnung den Dreiecken in der gegebenen Figur nur ähnlich, und ſetzt ſie in der gehörigen

Ordnung an einander, ſo ſind beide, nemlich die gegebene und gezeichnete Figur, einander ähnlich.

§. 682. Wenn man eine Höhe meſſen ſoll, ſo findet hier ebenfalls die Lehre von der Aehnlichkeit der Triangel wieder ihre Anwendung. Läßt ſich an das untere Ende der Höhe kommen, ſo kann man ſich den rechtwinklichten Triangel CAB (Tab. 1. Fig. 14.) ſo vorſtellen, daß nemlich C die Spitze, A das untere Ende der Höhe, und B der Punct wäre, wo man den Mittelpunct des - ſenkrecht in die Höhe gerichteten Aſtrolabiums, anbringt. Der Durchmeſſer wird wagrecht gerichtet, und das bewegliche Lineal dreht man ſo lang herum, biß man die Spitze C erblickt; darburch bekommt man das Maas des Winkels CBA. Weil man nun die Linie AB meſſen kann, und bei A ein rechter Winkel iſt, ſo kann man einen Triangel cab zeichnen, worinnen ab nach dem verjüngten Maasſtab eben ſoviel mißt, als AB nach dem großen gefundenen Maas, und worinnen a = a und b = b iſt, und weil folglich beide Dreiecke einander ähnlich ſind, (§. 599.) ſo verhält ſich AB zu AC, wie ab zu ac, und alſo muß AC nach dem großen Maas eben ſo viel meſſen, als ac nach dem verjüngten Maasſtab.

Weil man die Inſtrumente, womit man die Winkel mißt, nicht unmittelbar auf die Erde legt, ſondern auf ein Stativ ſetzt, ſo muß man allemal

zu

zu der gefundenen Höhe noch die Höhe des Stativs addiren.

§. 683. Kann man zu dem untern Ende der Höhe nicht kommen, ſo nehme man (Tab. 1. Fig. 15.) einen ſchiefen Triangel ACB an, ſo, daß A an der Spitze der Höhe iſt, meſſe die Winkel B und C und die Linie CB, und zeichne hernach einen ähnlichen Triangel acb im Kleinen. Alsdenn verlängere man die Linie cb, und laſſe auf dieſelbe aus a einen Perpendikel fallen, ſo wird dieſer Perpendikel nach dem verjüngten Maasſtab eben das Maas enthalten, das ein von A auf die verlängerte Linie CB herunterfallender Perpendikel nach dem großen Maas mißt.

§. 684. Man kann die Aufgabe §. 667. vermittelſt des Meßtiſchgens auflöſen.

Man ſtelle das Meßtiſchlein über D, heiſſe den Punct deſſelben, der gerade über D ſteht, d, ziehe nach B und C zu, die Linien db und dc, die man nach dem verjüngten Maasſtab ſo groß mache, als DB und DC nach dem wirklichen Maaſe ſind, ſo iſt bc nach dem verjüngten Maasſtab ſo gros, als BC nach dem wirklichen Maaſe, oder ihr gemäs (§. 503.). Tab. 9. Fig. 135.

§. 685. Man kann die Aufgabe §. 668. vermittelſt des Meßtiſchleins auflöſen.

Vom Puncte d über D ziehe man, nach B zu, db, der Linie DB gemäs, von d aber nach C zu ziehe man dp von unbeſtimmter Länge. Nun ſtelle man b über B, und bd ſo, daß ſie von B nach D zu gehe,

 und

und ziehe von b nach C eine Linie, welche dp in e ſchneidet, ſo iſt bc der BC gemäs (§. 499.). Tab. 9. Fig. 136.

§. 686. Man kann die Aufgabe §. 669. vermittelſt des Meßtiſchleins aufloͤſen.

Man nehme eine Standlinie, die man meſſen kann, EF, an. Von dem Puncte e des Meßtiſchleins, welcher uͤber E ſteht, ziehe man, nach F zu, ef der EF gemäs, ingleichem, indem man ef in dieſer Lage unverruͤckt laͤßt, nach B und C zu, die unbeſtimmten Linien ea und eb. Nun trage man es in F, und ſtelle f uͤber F, und fe laͤngſt FE, ziehe darauf, von f nach B und C Linien, welche die vorigen in c und d ſchneiden, ſo iſt cd die geſuchte Weite nach dem verjuͤngten Maaſe. Denn das Dreieck cef iſt aͤhnlich dem Dreieck BEF,

also $ef : ec = EF : EB$,

das Dreieck def iſt aͤhnlich dem Dreieck CEF, alſo $ed : ec = EC : EF$,

folglich $ed : ec = EC : EB$.

Nun iſt aber auch

$cef = BEF$;

$def = CEF$;

alſo $ced = BEC$, und

$\triangle$ ced aͤhnlich $\triangle$ BEC,

alſo

$ec : cd = EB : BC$

und

$ef : cd = EF : BC$.

Tab. 9. Fig. 137.

§. 687. Will man die Weite CB finden, ohne das Meßtiſchlein fortzuruͤcken, wie ſonſt bei §. 668. 685. geſchehen muß, ſo ſtecke man Staͤbe in D und E mit B in gerader Linie, ziehe auf dem Meßtiſchlein

lein von c nach B eine unbeſtimmte Linie und nach D und E die Linien cf und ce den Linien CD und DE gemäs, ſo wird ef verlängert die Linie von c nach B in b ſo ſchneiden, daß cb der Linie CB gemäs iſt; dann das Dreieck cfe iſt ähnlich dem Dreieck CDE, alſo cfb iſt gleich CFB, und weil fcb gleich FCB, ſo iſt das Dreieck cfb ähnlich dem Dreieck CFB, und cf verhält ſich zu cb, wie ſich verhält CD zu CB. Wollte man alſo die Weite BF, an deren beide Enden man nicht kommen kann, aus dem einigen Stande C finden, ſo dürfte man nur noch in die Linie EF einen Stab G ſtecken, von c nach G eine kleine Linie ziehen und ſie der CG gemäs machen, ſo gäbe ſich ein Punct g auf dem Meßtiſchlein, durch welchen und durch e eine Linie gezogen, eine andere Linie, die man von c nach F zöge, in einem Puncte f ſchneiden würde, deſſen Weite von b nach dem verjüngten Maaſe ſo viel betrüge, als BF nach dem wirklichen Maaſe. Der Beweis fließt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke. Tab. 8. Fig. 138.

§. 688. Man kann die Aufgabe §. 667. vermittelſt des Aſtrolabiums auflöſen.

Man meſſe den Winkel D, und die Seiten DB, woraus ſich vermittelſt des Transporteurs und verjüngten Maasſtabes ein kleines Dreieck wie bdc auf dem Meßtiſchlein war, verzeichnen läßt, in dem man bc mißt, um BC zu wiſſen. Tab. 9. Fig. 135.

§. 689. Man kann die Aufgabe §. 668. vermittelſt des Aſtrolabiums aufloͤſen.

Die Seite DB und die Winkel D und B gemeſſen, geben ebenfalls ein kleines Dreieck, daß dem großen aͤhnlich iſt. Tab. 9. Fig. 136.

§. 690. Man kann die Aufgabe §. 669. vermittelſt des Aſtrolabiums aufloͤſen.

Man meſſe die Standlinie EF, und mache ihr nach dem verjuͤngten Maasſtab ef gemas. Ferner meſſe man BEF, CEF, BFE, CFE, und ſetze in eben ſolchen Winkeln Linien an e und f, wodurch ſich die Puncte c und d auf dem Papier geben, deren Weite der Weite BC gemaͤs iſt. Tab. 9. Fig. 137.

§. 691. Wenn die Figuren ABCDE und abcde einander aͤhnlich, und zwar die Seiten in der Ordnung, wie einerlei Buchſtaben an ihnen ſtehen, einander proportionirt ſind, ſo ziehe man nach Gefallen durch D und C Linien, die einander in F ſchneiden, und durch d und c Linien in eben den Winkeln mit dc, die einander in f ſchneiden. Die beiden F und f heiſſen aͤhnlichliegende, und wenn man aus ihnen an alle Winkel der Figuren gerade Linien zieht, ſo entſtehen lauter aͤhnliche Dreiecke. Tab. 9. Fig. 139.

$\triangle$ DFC ($\backsim$) iſt aͤhnlich
$\triangle$ dfc;
alſo verhaͤlt ſich
DF : CD = df : cd;
aber
CD : DE = cd : de,

folglich

folglich

DF : DE = df : de;

und weil

FDC = fdc,

EDC = edc,

ſo iſt

EDF = edf,

alſo

△ EDF ∽ △ edf.

Dieſe Aehnlichkeit der letztgenannten Dreiecke folgte aus der angenommenen Aehnlichkeit der erſten Dreiecke

DFC und dfc,

und ſo erhellt, daß aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EDF und edf die Aehnlichkeit der ihnen anliegenden EAF und eaf folgt, und aus der Aehnlichkeit jeden Paares Dreiecke immer die Aehnlichkeit des nächſt anliegenden Paares geſchloſſen wird.

§. 692. Weil die Lage des Punctes F ganz willkührlich iſt, ſo kann man ihn in einem Winkel annehmen, da denn f in eben den Winkel der andern Figur fallen muß, und von den Linien FC und fc u. ſ. w. zwei Paare, Seiten der Figuren, die übrigen Diagonalen werden. Alſo werden ähnliche Figuren durch ihre Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt. Tab. 8. Fig. 116.

§. 693. Soll man auf einer gegebenen Linie de eine Figur zeichnen, die einer gegebenen Figur ABCDE ähnlich iſt, ſo theile man die gegebene Figur durch Diagonalen in Dreiecke, und ſetze auf dc ein Dreieck dcb, das dem Dreieck

DCB ähnlich iſt, wieder auf db eines, des dem △ DAB ähnlich iſt, und ſo ſetze man die ähnlichen Dreiecke auf ähnliche Art an einander. Tab. 9. Fig. 140.

§. 694. Legt man f auf F, und fd, fc, längſt FD, FC, ſo fallen auch fa, fb, fe u. ſ. w. längſt FA, FB, FE u. ſ. w. und die Seiten der kleinen Figur liegen mit den Seiten der großen gleichlaufend. Zieht man in FA, durch einen willkührlichen Punct a, ab mit AB, und, durch den Punct b, bc mit BC gleichlaufend, ſo wird die innere Figur der äuſſern ähnlich. Denn wäre ſie ihr unähnlich, ſo mache man über ab eine Figur, die der äuſſern ähnlich iſt, ſo werden die Seiten dieſer ähnlichen Figur mit den Seiten der äuſſern gleichlaufend ſeyn; alſo iſt ihre Seite, die durch b geht, mit BC parallel und muß daher bc ſeyn. Tab. 9. Fig. 139. 140.

§. 695. Eine Figur auf dem Papier entwerfen, welche der auf dem Felde ähnlich ſei, heißt: **eine Figur in den Grund legen.**

Man ſtelle ſich die Figur auf dem Felde in Dreiecke getheilt vor, und meſſe von jedem ſo viel, daß man etwas zeichnen kann, das ihm ähnlich wird. Drei Fälle werden dieſe allgemeine Aufloͤſung erleichtern. Der erſte iſt, wenn man in die Figur auf dem Felde kommen kann. Der zweite iſt, wenn man nicht in die Figur kommen kann. Der dritte iſt, wenn man aus

zween

zween Ständen alle Winkel einer Figur überſehen kann.

§. 696. I. Man kann in die Figur auf dem Felde ABCDE kommen und nach Gefallen darinnen meſſen. Tab. 9. Fig. 139. 140.

Nimmt man z. B. F an, und mißt die Seiten FA, FB, und FC der Dreiecke FAB, FBC u. ſ. w. ingleichem ihre Winkel bei F, ſo kann man um einen Punct f herum ähnliche Dreiecke fab, fbc u. ſ. w. beſchreiben. Das Meßtiſchlein über F geſetzt gibt dieſe ähnliche Dreiecke gleich ſelbſt wie Fig. 140. Will man nicht alle Linien aus F meſſen, ſo kann man ſtatt ihrer zuweilen die Seiten brauchen. Wenn man z. B. FC nicht meſſen wollte, aber b auf die gehörige Art beſtimmt hätte, ſo zöge man fb und machte daran einen Winkel = BFC, den andern Schenkel dieſes Winkels durchſchnitte man aus b mit einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer der Linie BC, die man meſſen müßte, gemäs wäre, ſo gäbe ſich c, weil es aber zween Durchſchnitte gibt, ſo muß man acht geben, ob BCF ſpitzig oder ſtumpf iſt, denn wenn er beinahe ein rechter Winkel iſt, ſo darf man nicht ſo verfahren, weil da beide Durchſchnitte zu ſehr ſich nähern, auch muß man zuweilen Linien von F an die Winkel gezogen, zur Probe und Verſicherung meſſen. Will man aber alle Seiten und alle Diagonalen meſſen, ſo kann man ein Feld auf dieſe Art nach Tab. 8. Fig. 116. in Grund legen, ohne etwas anders, als Stäbe und Meßkette zu gebrauchen.

§. 697. II. Man kann nicht in die Figur kommen, aber um ſie herumgehen.

Man meſſe in dieſem Fall alle Seiten und Winkel. Tab. 9. Fig. 140.

§. 698. III. Man kann aus zween Ständen alle Winkel einer Figur überſehen. Tab. 9. Fig. 140. Hier laſſen ſich die Längen ihrer Seiten und derſelben Lagen gegen einander nach §. 686. 640. finden, auf welche Art ganze Gegenden in Grund gelegt werden.

Obgleich das bisher Geſagte beinahe die Theorie des Feldmeſſens enthält, ſo ſetzt doch die Ausübung derſelben noch verſchiedene Kenntniſſe, die man aus beſondern Büchern erlernen muß, auſſer der wirklichen Handanlegung voraus.

§. 699. Auſſer der Theorie des **Feldmeſſens** gehört auch die **Markſcheidekunſt** in das Gebiet der **praktiſchen Geometrie**.

§. 700. Die **Markſcheidekunſt** (Geometria ſubterranea) oder die **unterirdiſche Geometrie** iſt die Wiſſenſchaft, welche lehrt, wie man die unter der Erden gemachten Gänge, die man Grubengebäude nennt, ausmeſſen und zeichnen, oder in den Riß bringen ſoll.

§. 701. Dieſe Wiſſenſchaft lernt derjenige bald, der die Geometrie verſteht. Es iſt aber nöthig, daß er ſich die Sprache der Bergleute bekannt mache, und mit den- zum unterirdiſchen Meſſen tauglichen Inſtrumenten, die aber von den Inſtrumenten der praktiſchen Geometrie nicht viel unterſchieden ſind, umzugehen wiſſe.

§. 702.

§. 702. Bei den Bergleuten iſt folgender Sprachgebrauch üblich:

Dohnlege. Hinunter veſteht man das Steigen und Fallen der Gänge.

Durchſchlag. Iſt ein von einem Punct zu einer Grube gemachter Zugang.

Fläche. Iſt die ſchiefe Hypotenuſe, worauf man in die Grube auf- und abſteigt.

Fundgrube. Iſt ein Name, der im Flächenmaas gebräuchlich iſt. Eine Fundgrube hält drei Wehr.

Gang, fallender. Der in die Tiefe geht.

— flacher. Ein Gang, der einen Winkel von 30 bis 60 Graden macht.

— ſchwebender. Ein Gang, der einen Winkel zwiſchen dem Horizont und 20 Graden macht.

— ſtehender. Ein Gang, der mit dem Horizont einen Winkel von 60 bis 80 Graden macht.

— ſteigender. Ein Gang, der in die Höhe geht.

Grube. Iſt ein gegrabener Gang.

Grubengebäude. S. Grube.

Grubenzug. Wenn die Meſſung unter der Erde geſchieht.

Lachter. Ein Längenmaas. Es hält gemeiniglich 6 Schuh wie ein Klafter; ein Schuh aber hält 10 Zoll; ein Zoll 10 Gran; folglich läßt ſich ein Lachter in Gran geben. S. Fundgrube.

Lehn. Ein Lehn iſt ſieben Lachter lang und breit.

Lochſteine. Die Steine, womit die Orthung an Tag ausgebracht wird.

Lochſteine in die Grube fällen. Heißt: ein Perpendikel von einem Punkt über der Erde in die Grube fällen.

Orthungen. Sind diejenige Punkte der Gruben, wo ein Winkel iſt, oder die Gruben ſich wenden, da man alſo nicht gerade fortmeſſen kann, ſondern eine Linie zieht.

— ganze. Sind Orthungen am Anfang und Ende der Gruben.

Orthung wird an Tag gebracht. Man ſagt dieſes, wenn die Orthungen oben auf der Erde perpendicular angezeigt werden.

Ortpfähle. Sind die Pfähle, womit die Orthung an Tag ausgebracht wird.

Reſolviren. Heißt: aus zwei Stücken des rechtwinklichten Dreiecks z. B. aus der Fläche (Hypotenuſa) und einem Winkel auſſer dem Rechten die übrigen Stücke finden. Z. B. die Seigerteufe und Sohle.

Schacht. Ein gegrabener Gang, der perpendicular oder unter einem Winkel iſt, welcher mit dem Horizont 80 bis 90 Grade macht.

Seigerteufe. Iſt, was man bei einem rechtwinklichten Dreieck die perpendiculare Seite nennt.

Sohle. Iſt, was bei einem rechtwinklichten Dreieck die horizontale Grundlinie iſt.

Stollen. Wenn die gegrabenen Gänge mehr horizontal gehen.

Tagzug. Wenn die Meſſung oberhalb der Erde geſchieht.

Vermeſſen. Heißt: den Ort auf der Oberfläche der Erde beſtimmen, wie weit man graben dörfe.

Wehr. S. Fundgrube. Ein Wehr hält zwei Lehne.

Zug. Die Meſſung der Gänge.

Zugeben. Wenn man das Gemeſſene überhaupt vom Papier aufs Feld bringt.

Zulegen. Wenn man das Gemeſſene überhaupt aufs Papier bringt.

§. 703. Die Inſtrumente, die man zum Markſcheiden braucht, ſind

1) die Gradbogen oder die Waſſerwage, die wie ein Transporteur mit einem Bleiwurf ausſieht;

2) der Häng= oder Grubencompaß, welcher wie ein anderer Compaß beſchaffen iſt, nur daß die Peripherie in 24 gleiche Theile getheilt iſt, die man nach den Stunden des Tags Stunden nennt. Die 12te gegen Mittag wird bezeichnet mit Meridies, und die 12te gegen Mitternacht mit Septentrio. Auf die Abendſeite kommen die Morgenſtunden, und auf die Morgenſeite die Abendſtunden, wie bei Sonnenuhren.

Nach dieſen Stunden oder Weltgegenden heiſſen die zwiſchen 9 und 12 fallende Gänge — flache — die

die zwiſchen 12 und 3 — ſtehende — die zwiſchen 3 und 6 — Morgengänge — die zwiſchen 6 und 9 — Abendgänge.

§. 704. Auſſer dieſen Inſtrumenten hat man noch die Stundenſcheibe und den Stündentransporteur, welche wie die Peripherie des Compaſſes eingetheilt ſind, und das Zuleginſtrument zum Zeichnen und Verjüngen der Grubengebäude nöthig.

Trigo-

Trigonometrie.

Ebene Trigonometrie.

§. 705. Die ebene Trigonometrie lehrt aus drei gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks, unter welchen wenigſtens eine Seite ſeyn muß, die übrigen drei Stücke durch Rechnung finden.

Eine Seite muß deßwegen gegeben ſeyn, weil drei Winkel unendlich viel ähnliche Dreiecke beſtimmen, und folglich die Seiten der Dreiecke in der ebenen Trigonometrie aus drei gegebenen Winkeln anders nicht, als unbeſtimmt gefunden werden; man will aber die Seiten beſtimmt wiſſen.

Erſter Abſchnitt.

Vom Sinus, Coſinus, Tangente, Cotangente, Secanten, Coſecanten.

§. 706. Ein Perpendikel, welches von dem Endpunct eines Halbmeſſers auf einen andern Halbmeſſer herabgefällt wird, heißt der *Sinus* des Bogens, der zwiſchen den beiden Halbmeſſern enthalten iſt. EF iſt alſo der *Sinus* des Bogens EB. Tab. 10. Fig. 141.

§. 707. Weil der Bogen EB das Maas des Winkels EDB iſt, ſo iſt EF auch der *Sinus* dieſes Winkels. Tab. 10. Fig. 141.

§. 708. Wird der *Sinus* in gerader Linie verlängert, bis er den Kreis wieder in G ſchneidet, ſo iſt FG=EF (§. 447.) und der Bogen EB=BG (§. 477.). Der *Sinus* eines Bogens iſt alſo die halbe Sehne des doppelten Bogens. Tab. 10. Fig. 141.

§. 709. Weil von dem Endpuncte des Halbmeſſers ED auf dem Halbmeſſer DC kein anders Perpendikel kann gefällt werden, als das, welches auf den rückwärts nach B verlängerten Halbmeſſer ſich fällen läßt, nemlich abermals EF, ſo iſt der vorige *Sinus* der *Sinus* von beiden Bogen, die zuſammen einen halben Cirkel oder 180 Grade machen.

Zween Nebenwinkel haben alſo einerlei *Sinus*. So iſt z. B. der *Sinus* von 30° auch der *Sinus* von 150°, d. i. der *Sinus* des ſpitzigen Winkels iſt auch der *Sinus* ſeines ſtumpfen Nebenwinkels. Tab. 10. Fig. 141.

§. 710. Die *Sinus* wachſen von B oder 0 Grad bis auf 90° oder I, wo im erſten Quadranten ID der größte *Sinus* wird. Von hier an nehmen ſie wieder ab, bis C oder 180°, wo der *Sinus* abermal null wird. Von C bis M, (alſo 180+90=270°) nehmen ſie aber auf den entgegengeſetzten Seiten des Durchmeſſers BC wieder zu, und von M bis B oder 360° nochmal auf dieſer Seite wieder ab. Verdoppelt man die Peripherie, ſo nehmen ſie von 360 oder B bis I (360+90=450°) wieder auf der erſten

Seite

Seite zu, und von I oder 450° bis C oder 450 + 90° = 540° auf eben der Seite wieder ab u. ſ. w. denn man kann die Peripherie ſo vielmal nehmen, als man will. Tab. 10. Fig. 141.

§. 711. Der gröſste *Sinus* wie DI, iſt dem Halbmeſſer gleich. Tab. 10. Fig. 141.

§. 712. Der gröſste *Sinus*, d. i. der Halbmeſſer, heiſst in der Trigonometrie der *Sinus totus*.

§. 713. Weil kein *Sinus* gröſser wird, als der *Sinus totus*, ſo kann man die *Sinus* als eigentliche Brüche vom *Sinus totus* oder Halbmeſſer anſehen.

§. 714. Poſitiv heiſst bei einer Figur, was gegen die eine Seite zu liegt; negativ, was gegen die andere zu liegt, oder umgekehrt, ſo daſs beide Gröſsen gerade entgegengeſetzt ſind.

§. 715. Die *Sinus* von 0 bis 180° ſind alſo poſitiv, und die *Sinus* von 180° bis 360 ſind negativ (nach §. 710.); und dieſe Verhältniſs bleibt auch bei Vervielfältigung der Peripherie. Oder, betrachtet man die vier Quadranten eines Cirkels, ſo ſind die *Sinus* in den zween erſten poſitiv, und in den zween letztern negativ, bei der Verdopplung abermal im fünften und ſechsten poſitiv, im ſiebenten und achten negativ u. ſ. w.

EF alſo iſt der *Sinus* vom Bogen EB und vom Bogen EC; ferner von dem Bogen ECe, aber negativ; und vom Bogen ECeB, aber auch negativ;

 weiter

weiter vom Bogen BCEeBE, aber wieder poſitiv u. ſ. w. ins Unendliche. Ein einiger *Sinus* iſt alſo der *Sinus* von unendlich vielen Bögen. Es läßt ſich deßwegen keine beſtimmte Verhältniß zwiſchen dem Bogen und ſeinem *Sinus* geben. Auſſer dem *Sinus totus* giebt es nur einen einigen, der genau berechnet werden kann, nemlich den *Sinus* von 60 Graden. Tab. 10. Fig. 141.

§. 716. Iſt ein Bogen unter 90° gegeben, ſo heißt die Anzahl Grade, oder der Bogen, der, zu ihm addirt, 90° vollends giebt, das *Complementum* d. i. die Ergänzung zu 90°, und der *Sinus* dieſes Bogens heißt der *Sinus Complementi* oder *Coſinus*.

EI iſt das *Complementum* von BE, denn BE + EI iſt gleich 90°; der *Sinus* von EI iſt EL, nun aber iſt EL = FD, folglich iſt FD der *Sinus* von EI, oder der *Sinus Complementi*, oder der *Coſinus*. Tab. 10. Fig. 141.

§. 717. Aus dem gegebenen Halbmeſſer und *Sinus* eines Bogens läßt ſich der *Coſinus* finden; er iſt nemlich allemal die Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate des Halbmeſſers und des *Sinus*.

$$FD = \sqrt{(DE^2 - FE^2)}$$

da nun

$$DE^2 = FE^2 + FD^2 \quad (\S. 444.)$$

und

$$FE^2 = FE^2$$

ſo bleibt nach geſchehenem Abzug

$$DE^2 - FE^2 = FD^2$$

zieht man die Wurzel aus,

ſo

ſo ſteht

$$\sqrt{DE^2 - FE^2} = FD.$$

Tab. 10. Fig. 141.

§. 718. Iſt der Halbmeſſer = 1, und der *Sinus* = 5, ſo iſt der *Coſinus* = $\sqrt{1 - 5^2}$.

§. 719. Iſt der *Coſinus* nebſt dem Halbmeſſer gegeben, ſo iſt der *Sinus* auch gegeben, denn wenn der *Coſinus* = 6, ſo iſt der *Sinus* 5 = $\sqrt{1 - 6^2}$.

§. 720. Die *Coſinus* nehmen ab, wenn die *Sinus* wachſen. Die *Coſinus* wachſen, wenn die *Sinus* abnehmen.

Je größer FE wird, deſto kleiner wird FD, und umgekehrt. Tab. 10. Fig. 141.

§. 721. Wird der *Sinus* dem Halbmeſſer gleich in DI, ſo fällt der *Coſinus* in den Mittelpunct D und verſchwindet oder wird = Null; folglich ſind die *Coſinus* der Bogen, die über 90° ſind, negativ bis auf 180°, wo der *Sinus* = Null, der *Coſinus* aber = DC = — BD = Halbmeſſer, und daher ein Größtes wird; dann nimmt er wieder ab bis auf 180 + 90 = 270°, wo er zum zweitenmal = 0 wird. Von da an wird er wieder poſitiv, und nimmt zu bis 360, wo er = BD, und von da an bis I, oder bis 360 + 90 = 450° wieder abnimmt, und 0 wird u. ſ. w. Tab. 10. Fig. 141.

§. 722. Die *Coſinus* vom erſten und vierten Quadranten ſind alſo poſitiv, die von den zwei

mittlern, nemlich dem zweiten und dritten ſind negativ u. ſ. w.

§. 723. Jeder *Coſinus* gehört, wie der *Sinus*, unendlich vielen Bogen zu.

§. 724. Eine gerade Linie, welche den Kreis in dem Punct, wo der Bogen anfängt, unter einem rechten Winkel mit dem Halbmeſſer berührt, und von dem andern verlängerten Halbmeſſer geſchnitten und folglich beſtimmt wird, heißt die Tangente des Bogens, und der verlängerte Halbmeſſer, welcher ſie ſchneidet, wird die Secante genannt. BH iſt die Tangente und DH die Secante.

§. 725. Aus dem Halbmeſſer und dem *Sinus* iſt der *Coſinus* (nach §. 717.), und aus beiden ſind die Tangente und Secante gegeben.

Wenn der Halbmeſſer gleich r, und der Winkel oder Bogen BE gleich p, ſo iſt

I. die Tangente p gleich dem Halbmeſſer r, welcher mit dem *Sinus* p multiplicirt, und durch den *Coſinus* p dividirt worden;

oder:

$$\text{Tang. } p = \frac{r.\ \text{Sin. } p}{\text{Coſin. } p}$$

Der Beweis läßt ſich auf folgende Art führen: das Dreieck FDE iſt dem Dreieck BHD ähnlich, folglich verhält ſich FD zu FE, wie ſich BD zu BH verhält.

oder:

Der *Coſinus* p verhält ſich zum *Sinus* p, wie ſich verhält der Halbmeſſer r zu r, multiplicirt durch den *Sinus* p (=BH), dividirt durch den *Coſinus* p.

Aber

Aber BH iſt gleich der Tangente der Halbmeſſer r, multiplicirt mit dem *Sinus* p, dividirt durch den *Coſinus* p, iſt gleich der Tangente.

Oder:

$\triangle$ FED $\backsim$ $\triangle$ BHD folglich FD : FE = BD : BH

$$Cos.\ p : Sin.\ p = r : \frac{r.\ Sin.\ p}{Cos.\ p} = BH$$

da aber BH = Tang: ſo iſt $\frac{r.\ Sin.\ p}{Cos.\ p}$ = Tang. p.

II. Die Secante p iſt gleich dem Quadrat von r, dividirt durch den *Coſinus* p.

Oder:

$$Secans\ p = \frac{r^2}{Cos.\ p.}$$

Der Beweis iſt folgender:

Das Dreieck FDE iſt dem Dreieck BHD ähnlich, folglich verhält ſich FD zu DE, wie DB zu DH. DE gleich DB ſind Halbmeſſer, dieſe ſubſtituirt geben folgendes Verhältniß:

FD zu BD, wie DB zu DH

Der *Coſinus* p verhält ſich zum Halbmeſſer r, wie ſich r verhält zum Quadrat des Halbmeſſers, (= DH), dividirt durch den *Coſinus* p. Da aber DH gleich iſt der Secante, ſo iſt das Quadrat von r, dividirt durch den *Coſinus* p, gleich der Secante p.

Oder:

$\triangle$ FDE $\backsim$ $\triangle$ BHD

folglich

FD : DE = DB : DH

DE = DB

FD : DB = DB : DH.

$Cos.\, p : r = r : r^2 = DH$

$\overline{Cos.\, p.}$

da aber $DH = Secant.$ $\frac{r^2}{Cos.\, p} = Sec.\, p.$

Tab. 10. Fig. 141.

§. 726. Die Secante iſt die Quadratwurzel aus der Summe des Quadrats der Tangente und des Quadrats des Halbmeſſers, und man kann aus der Tangente die Secante finden.

DH die Secante,
BH die Tangente,
BD der Halbmeſſer,
ſo iſt

$DH = BH^2 + BD^2$

und

$DH = \sqrt{BH^2 + BD^2},$

oder

$Cos.\, p = \sqrt{(Tang.\, p)^2 + r^2}.$

Tab. 10. Fig. 141.

§. 727. Eben ſo kann man aus der Tagente und dem *Coſinus* den *Sinus* u. ſ. w. oder überhaupt, wenn der Halbmeſſer als bekannt angenommen wird, aus zwei Stücken, was man für will, das dritte finden, wenn man nur die ähnlichen Dreiecke betrachtet, und das Geſuchte daraus herleitet. Tab. 10. Fig. 141.

§. 728. Wenn der *Coſinus* p zur Nulle wird, ſo iſt der Halbmeſſer p, mit dem *Sinus* p multiplicirt,

plicirt, und durch den *Coſinus* p dividirt, gleich r, multiplicirt durch den *Sinus* p, dividirt durch Null = ∞ (unendlich), und das Quadrat von r, dividirt durch den *Coſinus* q, iſt gleich dem Quadrat des Halbmeſſers, dividirt durch Null = ∞ (unendlich); folglich ſind Tangente und Secante unendlich. Da nun der *Coſinus* p zweimal in den vier Quadranten unendlich wird, ſo wird auch die Tangente und Secante zweimal unendlich, und zwar eben da, wo der *Coſinus* Null wird. Eben dieſes erhellt aus der Figur, weil in beiden Fällen bei I und M die Tangenten und Secanten Parallellinien werden, die unendlich fortgehen, ohne einander zu ſchneiden. Tab. 10. Fig. 141.

§. 729. Wenn der *Sinus* p = Null, ſo iſt die Tangente auch = Null; folglich wird die Tangente zweimal in den vier Quadranten Null, und zwar eben da, wo der *Sinus* Null wird, die Secante aber wird in dieſem Fall dem Halbmeſſer gleich.

§. 730. Im erſten und dritten Quadranten ſind alſo die Tangenten poſitiv, im zweiten und vierten aber negativ.

§. 731. Eine jede Tangente und Secante correſpondirt unendlich vielen Bögen.

§. 732. Die Tangente des *Complementi* zu 90° heißt Cotangente. Sie wird durch die Secante

cante des Bogens, welche deßwegen Coſecante heißt, geſchnitten und beſtimmt.

Die Tangente heißt FG; das *Complementum* EF; die Cotangente FG; die Cotangenten haben in den verſchiedenen Quadranten einerlei Zeichen mit den Tangenten. Tab. 10. Fig. 142.

§. 733. Durch den *Sinus* und Halbmeſſer wird die Cotangente und Coſecante beſtimmt.

Die Buchſtaben ſeien, wie oben §. 725.

I. Die Cotangente p iſt gleich dem Quadrat des Halbmeſſers r, dividirt durch die Tangente p.

Oder:

$$Cot.\ p = \frac{r^2}{Tang.\ p.}$$

Der Beweis iſt folgender:

Weil BI und FD parallel ſind, ſo iſt der Winkel I gleich IDF (§. 410.). B = F ſind Recti, alſo = 90°. Weil das Dreieck IBD dem Dreieck DFG ähnlich iſt, ſo verhält ſich BI zu BD, wie DF zu FG. Da nun BD = DF Halbmeſſer ſind, ſo verhält ſich BI zu BD, wie BD zu FG. Mit andern Worten ausgedrückt heißt es:

die Tangente p verhält ſich zum Halbmeſſer r, wie ſich r verhält zum Quadrat des Halbmeſſers (= FG = *Cotangente*), dividirt durch die Tangente p.

Oder:

$$\triangle IBD \backsim \triangle DFG;\ \text{daher}$$
$$BI : BD = DF : FG$$
$$BD = DF$$
$$\overline{BI : BD = BD : FG.}$$
$$\overline{Tang.\ p : r = r : \frac{r^2}{Tang.\ p.} = FG = Cotang.}$$

II.

II. Die Coſecante p iſt gleich dem Quadrat des Halbmeſſers, dividirt durch den *Sinus* p.

$$(Coſec.\ p = \frac{r^2}{Sin.\ p.}).$$

Dieſer Satz läßt ſich auf folgende Art beweiſen: I iſt gleich IDF und B gleich F, folglich iſt das Dreieck IBD ähnlich dem Dreieck DFG. Da nun das Dreieck IBD ähnlich iſt dem Dreieck ECD, ſo iſt auch das Dreieck ECD ähnlich dem Dreieck DFG, folglich verhält ſich CE zu DE, wie DF zu DG. DE aber gleich DF ſind Halbmeſſer, folglich verhält ſich CE zu DE, wie DE zu DG.

Oder:

$I = IDF;$
$B = F;$

$\triangle IBD \backsim \triangle DFG$
$\triangle IBD \backsim \triangle ECD$

$\triangle ECD \backsim \triangle DFG$, folglich
$CE : DE = DF : DG$
$DE = DF$ ſind Halbmeſſer

$CE : DE = DE : DG$

$$Sin.\ p : r = r : \frac{r^2}{Sin.\ p.} = DG = Coſec.$$

Tab. 10. Fig. 142.

§. 734. Was von den Tangenten in Abſicht auf ihre Zeichen nach den verſchiedenen Quadranten und auf die unendlich viele Bogen, die ihnen correſpondiren können, geſagt worden, gilt auch von den Cotangenten.

§. 735. Die Cotangenten verhalten ſich umgekehrt wie die Tangenten, denn es ſei ein anderer Bogen gleich q, ſo iſt (nach §. 733.) die Cotangente p gleich dem Quadrat des Halbmeſſers, dividirt durch die Tangente q.

$$Cotang.\ q = \frac{r^2}{Tang.\ q.}$$

§. 736. Die Cotangente q verhält ſich zur Cotangente p, wie ſich die Tangente p zur Tangente q verhält;

$$(Cot.\,q : Cot.\ p = Tang.\,p : Tang.\ q.)$$

Der Beweis iſt folgender:

die Cotangente q verhält ſich zum Quadrat des Halbmeſſers, dividirt durch die Tangente q, wie ſich die Cotangente p verhält zum Quadrat des Halbmeſſers, dividirt durch die Tangente p.

$$Cotang.\ q : \frac{r^2}{Tang.\,q} = Cotang.\ p : \frac{r^2}{Tang.\ p.}$$

Verſetzt man die Glieder, ſo kommt

$$Cotang.\,q : Cotang.\ p = \frac{r^2}{Tang.\,q} : \frac{r^2}{Tang.\,p.}$$

Multiplicirt man das dritte und vierte Glied mit der Tangente q, ſo erfolgt:

$$Cotang.\,q : Cotang.\,p = r^2 : \frac{Tang.\ q.\ r^2}{Tang.\ p.}$$

Multiplicirt man das dritte und vierte Glied mit der Tangente p, ſo erfolgt:

$$Cotang.\,q : Cotang.\,p = r^2.\ Tang.\,p : Tang.\,q.\,r^2$$

dividirt

dividirt man durch das Quadrat des Halbmeſſers (r^2), ſo kommt der obige, nun bewieſene Satz zum Vorſchein

$$Cotang.\,q : Cotang.\,p = Tang.\,p : Tang.\,q.$$

§. 737. Der Unterſchied zwiſchen dem Halbmeſſer und *Coſinus* wird Querſinus, *Sinus verſus* oder *Sagitta* genannt. In der Figur heißt er BC. Tab. 10. Fig. 142.

§. 738. Die bisherigen Sätze laſſen ſich kürzlich faſſen. A. Ein halber Cirkel werde durch q bedeutet, und der Halbmeſſer ſei gleich 1, ſo iſt

I. Wenn der *Sinus* $0\,q = 0$, der *Coſinus* $0\,q = 1$, die Tangente $0\,q = 0$, die Cotangente $0\,q = \infty$.

II. Wenn der *Sinus* $\frac{1}{2}q = 1$, ſo iſt der *Coſinus* $\frac{1}{2}q = 0$, die Tangente $\frac{1}{2}q = \infty$, die Cotangente $\frac{1}{2}q = 0$.

III. Wenn der *Sinus* $q = 0$, ſo iſt der *Coſinus* $q = -1$, die Tangente $q = 0$, die Cotangente $q = -\infty$.

IIII. Wenn der *Sinus* | $\frac{3}{2}q = -1$, ſo iſt
| 30. 9°

der *Coſinus* | $\frac{3}{2}q = 0$, die Tangente $\frac{3}{2}q = -\infty$,
| 3. 90° die Cotangente $\frac{3}{2}q = 0$.

V. Wenn der *Sinus* $2\,q = 0$, ſo iſt der *Coſinus* $2\,q = 1$, die Tangente $2\,q = 0$, die Cotangente $2\,q = \infty$.

B.

B. Der Bogen überhaupt werde Z genannt. Der Halbmeſſer = 1.

I. Das Quadrat des *Sinus* Z plus dem Quadrat des Coſinus Z iſt gleich 1. Die Tangente Z und Cotangente Z = 1.

$(Sin. Z)^2 + (Cos. Z)^2 = 1. \; (Tang. Z)\,(Cot. Z) = 1.$

II. Der *Sinus* Z iſt gleich dem *Coſinus* Z, multiplicirt mit der Tangente Z.

$(Sin. Z = Cos. Z. \; Tang. Z.)$

Der *Sinus* Z iſt gleich dem *Coſinus* Z, dividirt durch die Cotangente Z.

$(Sin. Z = Cos. Z : Cot. Z.)$

III. Der *Coſinus* Z iſt gleich dem *Sinus* Z, dividirt durch die Tangente Z.

$(Cos. Z = Sin. Z : Tang. Z.)$

Der *Coſinus* Z iſt gleich dem *Sinus* Z, multiplicirt durch die Cotangente Z.

$(Cos. Z = Sin. Z. \; Cot. Z.)$

IIII. Die Tangente Z iſt gleich dem *Sinus* Z, dividirt durch die Cotangente Z. $(Tang. Z = \frac{Sin. Z}{Cot. Z.})$

Die Tangente Z iſt gleich 1, dividirt durch die Cotangente Z. $(Tang. Z = \frac{1}{Cot. Z.})$

V. Die Cotangente Z iſt gleich dem Coſinus Z, dividirt durch den *Sinus* Z.

$$(Cot.\ Z = Cos.\ Z : Sin.\ Z.)$$

Die Cotangente Z iſt gleich 1, dividirt durch die Tangente Z.

$$(Cot.\ Z = 1 : Tang.\ Z.)$$

VI. Die Tangente X verhält ſich zur Tangente Z, wie ſich die Cotangente Z zur Cotangente X verhält.

$$(Tang.\ X : Tang.\ Z = Cot.\ Z : Cot.\ X).$$

Dieſe Formeln hat man bei trigonometriſchen Rechnungen nöthig.

§. 739. Das Quadrat des Halbmeſſers iſt das Product von zween unmöglichen Factoren. Der eine Factor iſt der *Coſinus* plus dem Product vom *Sinus* in die Quadratwurzel aus Minus Eins, alſo

$$(r^2 = (Cos.\ p. + Sin.\ p \sqrt{-1});$$

der andere Factor iſt der *Coſinus* Minus dem Product vom *Sinus* in die Quadratwurzel aus Minus Eins, alſo

$$(r^2 = (Cos.\ p - Sin.\ p \sqrt{-1}).$$

Der Beweis läßt ſich auf folgende Weiſe führen: das Quadrat des Halbmeſſers iſt gleich dem Quadrat des *Coſinus* p plus dem Quadrat des *Sinus* p.

$$(r^2 = (Cos.\ p)^2 + (Sin.\ p)^2\ (§.\ 717.).$$

Das Quadrat des *Coſinus* p plus dem Quadrat des *Sinus* p iſt gleich dem *Coſinus* p plus dem *Sinus* p in die Quadratwurzel aus Minus Eins, und dem

Coſinus p Minus dem *Sinus* p in die Quadratwurzel aus Minus Eins

$$(Cos.\,p)^2 + (Sin.\,p)^2 = Cos.\,p + Sin.\,p\,\sqrt{-1}$$
$$\text{multiplicirt mit } Cos.\,p - Sin.\,p\,\sqrt{-1}).$$

denn wenn man wirklich multiplicirt, ſo ſind die Partialproducte

$$(Cos.\,p)^2 + Cos.\,p\,Sin.\,p\,\sqrt{-1}$$
$$- Cos.\,p\,Sin.\,p\,\sqrt{-1} - (Sin.\,p)^2 - 1$$

d. i. $Cos.\,p^2 - (Sin.\,p)^2 - 1$

da aber $- Sin.\,p^2 - 1 = + (Sin.\,p)^2$

ſo iſt

$$(Cos.\,p)^2 + (Sin.\,p)^2 = (Cos.\,p + Sin.\,p\,\sqrt{-1})$$
$$\text{multiplicirt mit } (Cos.\,p - Sin.\,p\,\sqrt{-1})$$

folglich iſt

$$r^2 = Cos.\,p + Sin.\,p\,\sqrt{-1})\,(Cos.\,p.\,Sin.\,p\,\sqrt{-1})$$

§. 740. Zween unmögliche Factores können alſo ein mögliches und reelles Product geben.

§. 741. Dividirt man mit dem Quadrat des Halbmeſſers, ſo iſt

$$1 = \frac{Cos.\,p + Sin.\,p\,\sqrt{-1}}{r}\,\frac{(Cos.\,p - Sin.\,p\,\sqrt{-1}}{r}$$

r fällt ganz weg, wenn der Halbmeſſer = 1 geſetzt wird. Ferner iſt der obige Ausdruck allemal einem völligen Quadrat gleich, oder zweien Quadraten, die ſich in Eins verwandeln laſſen.

Zweiter

Zweiter Abſchnitt.

Allgemeine Theorie der trigonometriſchen Rechnung.

§. 742. In einem jeden geradelinigten Dreieck verhalten ſich die Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegenſtehenden Winkel, und die Winkel, wie die Sinus der ihnen entgegenſtehenden Seiten. Tab. 10. Fig. 143.

Man beſchreibe einen Zirkel um das Dreieck BCD, ſo werden die abgeſchnittenen Zirkelbögen BFC, CGD u. ſ. w. die Hälften des Maaſes der entgegenſtehenden Winkel D und B ſeyn (§. 471.), folglich die halben Bogen das Maas der ganzen Winkel; die Sinus der halben Bogen aber ſind die halben Chorden, oder die halben Seiten, die dem Winkel entgegengeſetzt ſind (§. 708.). Der Satz ſei:

$$Sin.\ D : BC = Sin.\ B : CD.$$

Der Beweis iſt folgender:

$$Sin.\ D. = \tfrac{1}{2}\ BC;$$
$$Sin.\ B = \quad CD\ (§. 708.).$$

Folglich

$$Sin.\ D : \tfrac{1}{2}\ BC = Sin.\ B : \tfrac{1}{2}\ CD$$

verſetzt man die Glieder, ſo kommt folgende Proportion:

$$Sin.\ D : Sin.\ B = \tfrac{1}{2}\ BC : \tfrac{1}{2}\ CD. \ -:2$$
$$Sin.\ D : Sin.\ B = BC : CD.$$

Eben ſo beweißt man es vom dritten Winkel, daß der *Sinus* C ſich zum *Sinus* B verhalte, wie BD zu CD; daher der Lehrſatz allgemein iſt.

§. 743. Sinus, Coſinus, Tangenten, Cotangenten, kurz, alle trigonometriſche Linien verhalten ſich bei ähnlichen Bogen, wie die Halbmeſſer. Tab. 10. Fig. 150.

De : ef = DE : EF.

Nun ſind De und DE Halbmeſſer, der eine ſei r, der andere R, die andern zwo Linien ſind die Sinus der ähnlichen Bogen EB und eb, folglich iſt

De : r = DE : R oder

De : DE = r : R.

Eben ſo wird der Beweis bei den übrigen trigonometriſchen Linien geführt.

§. 744. Zieht man in einem geradlinigten Dreieck von einer angenommenen Spitze A eine gerade Linie Ab unter beliebigem Winkel auf die Grundlinie BC herab, ſo verhalten ſich die Abſchnitte der Grundlinie, wenn ſie durch die mit ihnen correſpondirende Seiten dividirt werden, wie die *Sinus* der entgegenſtehenden neu entſtandenen Winkel. Tab. 4. Fig. 70.

Folgender Satz

$$Sin.\, o : Sin.\, 5 = \frac{BC}{BA} : \frac{bc}{AC}$$

iſt zu erweiſen.

Der Beweis iſt folgender:

Wenn der *Sinus* o ſich zum *Sinus* 5 multiplicirt mit n verhält, wie Bb zu BA,

$$(Sin.\, o : Sin.\, 5 \times n) = Bb : BA,)$$

und der *Sinus* m ſich verhält zum *Sinus* 5, wie AC zu bC (§ 742.)

$$(Sin.\, m : Sin.\, 5 = AC : bC)$$

ſo

ſo verhält ſich *Sinus* o multiplicirt mit *Sinus* m zum *Sinus* 5 multiplicirt mit *Sinus* n, wie bC multiplicirt AC zu BA multiplicirt mit bC.

$$(Sin.\ o \times (Sin.\ m) : Sin.\ 5 + (Sin.\ n) = (bC.\ AC) : BA.\ bC);$$

Da nun aber der *Sinus* m dem *Sinus* n gleich iſt

$$(Sin.\ m = Sin.\ n)\ (\S.709.)$$

ſo verhält ſich der *Sinus* o multiplicirt mit *Sinus* n zum *Sinus* 5 multiplicirt mit *Sinus* n, wie Bb multiplicirt mit AC zu BA multiplicirt zu bC

$$(Sin.\ o \times (Sin.\ n) : Sin.\ 5 \times (Sin.\ n) = (Bb.\ AC) : (BA.\ bC).$$

dividirt man die zwei erſten Glieder durch den *Sinus* n

(——— : *Sin.* n,

ſo heißt die Proportion

$$Sin.\ o : Sin.\ 5 = Bb.\ AC : BA.\ bC;$$

werden die zwei letztern Glieder durch BA dividirt

(——— : BA),

ſo heißt die Proportion

$$Sin.\ o : Sin.\ 5 = Bb.\ \frac{AC : bC;}{BA}$$

Geſchieht die Diviſion durch AC,

(——— : AC)

ſo heißt die Proportion

$$Sin.\ o : Sin.\ 5 = \frac{Bb}{BA} : \frac{bC}{AC}$$

alſo $Sin.\ o : Sin.\ 5 = \frac{Bb}{BA} : \frac{bC}{AC.}$

§. 745. Wenn in einem gleichſchenklichten Dreieck der Winkel am Scheitel, oder an der obern Spitze,

in zween gleiche Theile getheilt, und von dem Theilungspunct eine gerade Linie auf die Grundlinie gezogen wird, ſo wird I.) der Sinus des halbirten Winkels die halbe Grundlinie durch die eine Seite dividirt ſeyn, II.) eine jede Seite wird die halbe Grundlinie durch den Sinus des halben Winkels dividirt ſeyn, III.) die halbe Grundlinie wird das Product einer Seite in den Sinus des halben Winkels ſeyn, wenn der Sinus totus oder der Radius = 1 iſt.

Setzt man den Radius
= r an ſtatt =
nennt man den Winkel u,
den Sinus des halben Winkels ½ u,
die Grundlinie b,
die Seite a,
ſo iſt der Satz Nro. I.

$$\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}u = \frac{\tfrac{1}{2}b.\ r}{a} = \frac{br}{2a}.$$

Der Satz Nro. II.

$$a = \frac{r.\ \tfrac{1}{2}b}{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}u} = \frac{br}{2\,\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}u}$$

Der Satz Nro. III.

$$\tfrac{1}{2}b = \frac{a.\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}u}{r}$$

Soll der Satz Nro I. bewieſen werden, ſo iſt der Beweis, wie folgt:

Wenn das Dreieck ABC gleichſchenklicht iſt, und $o = n = \tfrac{1}{2}u$ iſt, ſo iſt $AD = DC = \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}b$, und bei D ſind rechte Winkel, daher entſteht folgende Proportion:

$$AB : AD = \text{Sin. tot} : \text{Sin. } o$$

oder

oder in Buchſtaben

$a : \frac{1}{2} b = r : \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u$, folglich

$$\frac{\frac{1}{2} b . r}{a} = \frac{br}{2a} = \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u,$$

und wenn $r = 1$, ſo iſt

$$\frac{b}{2a} = \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u.$$

Der Beweis von Nro. II. iſt:

Sin. o : AD = Sin. tot. : AB;

in Buchſtaben

$$\text{Sin.}\ \frac{1}{2} u : \frac{1}{2} b = r : a = \frac{\frac{1}{2} b . r}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2} u} = \frac{br}{2\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u}.$$

Der Beweis von Nro. III. iſt:

Sin. tot. : AB = Sin. o : AD,

in Buchſtaben

$$r : a = \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u : \frac{1}{2} b = \frac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2} u . a}{r}.$$

Zur kurzen und ſchnellen Ueberſicht ſtehen die drei Formeln neben einander, die demjenigen hauptſächlich nöthig ſind, der im Rechnen ſchnell fortkommen will. Sie ſind, wenn der Halbmeſſer gleich 1 iſt, folgende:

I. $\text{Sin.}\ \frac{1}{2} u = \frac{b}{20}$;

II. $a = \frac{b}{2\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u}$;

III. $\frac{1}{2} b = a : \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u$;

oder

$b = 2a . \text{Sin.}\ \frac{1}{2} u.$

Tab. 10. Fig. 144.

§. 746. Die Grundlinie in dem nemlichen Dreieck (§. 745.) iſt gleich dem Product einer Seite in den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Coſinus deſſelben halben Winkels dividirt; oder, laut obiger Buchſtaben,

$$b = \frac{a. \text{ Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u.}$$

Wenn BD = Cos. o
und Cos. o = Cos. $\frac{1}{2}$ u

ſo iſt BD = Cos. $\frac{1}{2}$ u
da auch BD = Sin. C

ſo iſt Sin. C = Cos. $\frac{1}{2}$ u.

da nun AC: AB = Sin. o + n: Sin. C
oder ſubſtituirt
b: a = Sin. u: Cos. $\frac{1}{2}$ u,
ſo iſt

$$\frac{a. \text{ Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u} = b,$$

und mithin der Beweis des Satzes geführt. Weil b = 2a. Sin. $\frac{1}{2}$ v (§. 745.), und weil, wie oben bemerkt,

$$b = \frac{\text{Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u},$$

ſo iſt die Rechnung wie folgt:

$$b = 2a. \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} u$$

$$b = \frac{a. \text{ Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u},$$

folglich $(2a. \text{ Sin. } \frac{1}{2} u) = \frac{a. \text{ Sin. } u}{\text{Cos. } \frac{1}{2} u}.$

Wird

Wird mit dem Coſinus $\frac{1}{2}$ u multiplicirt, ſo bleibt

$$2a. (\text{Sin.} \tfrac{1}{2} u. \text{Cos.} \tfrac{1}{2} u) = u. \text{Sin. } u.$$

Wird durch a dividirt, ſo bleibt

$$2. (\text{Sin.} \tfrac{1}{2} u. \text{Cos.} \tfrac{1}{2} u) = \text{Sin. } u.$$

Tab. 10. Fig. 144.

§. 747. Das Quadrat vom Sinus des halben Winkels iſt dem halben Product aus dem *Sinus totus* in die Differenz des Radius und Coſinus gleich. Oder das Quadrat vom Sinus des halben Winkels iſt dem halben Product aus dem Radius in den Querſinus gleich. Tab. 10. Fig. 144.

Zieht man die Linie AE auf BC ſenkrecht, ſo iſt AE der Sinus des ganzen Winkels o + n oder, wie oben bemerkt, des Winkels u. Nennt man nun AE = m, ſo iſt m = Sin. $\frac{1}{2}$ u der Coſinus von u, nemlich BE heiſſe t, ſo iſt

$$BE = t, \text{ und } t = \text{Cos. } u.$$

AD, der Sinus von o, iſt der Sinus des halben Winkels u, nennt man ihn s, ſo iſt

$$AD = s, \text{ und } s = \text{Sin. } \tfrac{1}{2} u.$$

Hieraus läßt ſich der Satz in Buchſtaben geben

$$s^2 = \frac{(r-t)r}{2}.$$

Der Beweis dieſes Satzes läßt ſich auf folgende Art führen:

$$FB : BE = AG : GE,$$

da nun FB = AB, weil o = n,

ſo iſt die Proportion:

$$AB : BE = AG : GE.$$

Kehrt man die Glieder um, ſo iſt

$$BE : AB = GE : AG,$$

ſetzt man hinzu, ſo iſt

$$(BE + AB) : AB = (GE + AG) : AG,$$

aber $(GE + AG) = AE$ in der Figur.

Die Proportion:

$$(BE + AB) : AB = AE : AG$$

wird in Buchſtaben, wo für den Radius $AB = r$ geſetzt wird, alſo ausgedruckt:

$$(r + t) : r = m : \frac{rm}{r + t} = AG.$$

Ferner iſt das Dreieck ADG dem Dreieck AEC ähnlich, weil D und E rechte Winkel ſind, und der Winkel bei A gemeinſchaftlich iſt, daher iſt

$$AE : AC = AD : AG,$$

oder, weil $AC = 2\,AD = 2\,ſ$ iſt, ſo iſt jene Proportion in Buchſtaben dieſe:

$$m : 2\,ſ = ſ : \frac{2\,ſ^2}{m} = AG.$$

Nun iſt, wie oben geſagt, $\frac{rm}{r + t} = AG$,

folglich iſt $\frac{2\,ſ^2}{m} = \frac{rm}{r + t}$,

Multiplicirt man mit m, ſo iſt

$$2\,ſ^2 = \frac{rm}{r + t};$$

dividirt man mit 2, ſo iſt

$$ſ^2 = \frac{rm^2}{2(r + t}$$

Mul-

Multiplicirt man den Zähler und Nenner mit r—t, ſo bleibt der Bruch unverändert (§. 72.); alſo

$$ſ^2 = \frac{rm^2 . (r-t)}{2(r+t)\,(r-t}$$

Nun iſt aber

$$(r+t).\,(r-t) = r^2 - t^2$$

(nach §. 145.), folglich ſubſtituirt

$$ſ^2 = \frac{rm^2\,(r-t)}{2(r^2-t^2)};$$

da nun

$$(r^2 - t^2) = m^2,$$

oder,

da das Quadrat des Radius, Minus dem Quadrat des Coſinus, dem Quadrat des Sinus, der m heißt, gleich iſt, ſo iſt

$$ſ^2 = \frac{rm^2\,(r-t)}{2m^2};$$

hebt man dieſes letztere Verhältniß durch m^2 auf, ſo bleibt $ſ^2 = \frac{r\,(r-t)}{2}$, welches der obige Lehrſatz (§. 747.) iſt. Weil r—t dem Querſinus gleich iſt (nach §. 737.), ſo iſt auch $ſ^2 = r.\,\frac{\text{Sin. verſ.}}{2}$

§. 748. Wenn man zween ſolche Winkel, wie u ſind, betrachtet, und beede halbirt, ſo iſt das Product aus der Summe der Sinuum dieſer halbirten Winkel in ihre Differenz dem halben Product des Radius in die Differenz ihrer Coſinuum gleich. Tab. 10. Fig. 144.

Der

Der eine Winkel heiſſe alſo u,
der andere v,
der Sinus des Winkels v ſei w;

oder:

der Sinus von v ſei gleich w,
der Coſinus von v = x
und der Sinus von $\frac{1}{2}$ v = y, ſo wird (wie oben §. 747.)

$$y^2 = \frac{r\,(r-x)}{2} \text{ ſeyn,}$$

und der Lehrſatz in Buchſtaben folgendermaſſen ausgedruckt werden:

$$(\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u + \mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v)\,.\,(\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u - \mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v) = \frac{r\,(\mathrm{Cos.}\,v - \mathrm{Cos.}\,u)}{2}$$

der Beweis iſt wie folgt: der Satz (§. 747.) heißt:

$$s^2 = \frac{r\,(r-t)}{2}$$

der Satz (§. 748.) heißt:

$$y^2 = \frac{r\,(r-x)}{2}$$

Zieht man beide Sätze von einander ab, ſo ſteht

$$s^2 - y^2 = \frac{r\,(r-t)}{2} - \frac{r\,(r-x)}{2};$$

oder man ſetzt wirklich die Producte durch die Multiplication hinzu, wie folgt:

$$s^2 - y^2 = (r^2 - rt) - (r^2 - rx);$$

und was ſich aufhebt, (nemlich $r^2 - r^2$) wird aufgehoben

$$sy^2 - y^2 = r^2 - rt - r^2 + rx,$$

und in der Bedeutung der Buchſtaben x und t hingeſetzt.

$$ZB.\ ſ^2 - y^2 = \frac{rx - rt}{2} = \frac{r\,(x - t)}{2}.$$

Iſt $ſ^2 - y^2 = \frac{r\,(\mathrm{Cos.}\,v - \mathrm{Cos.}\,u)}{2},$

ſo iſt $ſ^2 - y^2 = (\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u)^2 - (\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v)$;

da aber

$$(\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u)^2 - (\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v)^2 = (\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u + \mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v)\,.\,(\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u - \mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v)$$ iſt,

ſo iſt folglich

$$(\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u + \mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v)\,.\,(\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,u - \mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,v) = \frac{r\,(\mathrm{Cos.}\,v - \mathrm{Cos.}\,u)}{2}.$$

§. 749. Wenn der Winkel v kleiner iſt, als der Winkel u, wie er, im Beweis angenommen wurde, ſo iſt ſein Coſinus gröſser, als der Coſinus des gröſsern Winkels (§. 720.); deſswegen hat man die Differenz der Coſinuum ſo zu verſtehen, daſs der Coſinus des gröſsern vom Coſinus des kleinern abgezogen wird, ſonſt würde die Differenz und alſo auch das Product negativ. Es heiſst daher nicht $\frac{r\,(\mathrm{Cos.}\,u - \mathrm{Cos.}\,v)}{2}$ ſondern umgekehrt $\frac{r\,(\mathrm{Cos.}\,v - \mathrm{Cos.}\,u)}{2}$, wenn gleich der Winkel v kleiner iſt, als der Winkel u.

Dritter

Dritter Abſchnitt.

Die Erfindung der Sinus von den Summen und Differenzen der Bogen aus den gegebenen Sinuſſen und andern trigonometriſchen Linien.

§. 750. Wenn die Sinus zweier Bogen gegeben ſind, ſo kann man den Sinus ihres Unterſchieds finden. Er iſt das Product aus dem Coſinus des einen in den Sinus der Summe, weniger dem Product vom Sinus des andern in den Coſinus der Summe gleich; wenn der Radius eins oder = r iſt, ſo wird dieſe Differenz durch den Radius dividirt. Tab. 10. Fig. 145.

Der Radius ſei gleich r; BC und CE ſeien die Bögen; BE die Summe dieſer Bögen; der Sinus von BC iſt CF; der Sinus von CE iſt EH; der Sinus von BE iſt EG. Der Sinus von CF ſei gleich f und ſein Coſinus DF gleich g; der Sinus von EH gleich h; ſein Coſinus HD gleich i; der Sinus von EG gleich k, ſein Coſinus GD = l. Der Lehrſatz wird alſo in Buchſtaben ausgedruckt

$$\frac{gk - fl}{r} = h = EH.$$

Der Beweis iſt folgender:

I. DF : FC = DG : GK,

oder in Buchſtaben,

g : f = l : GK;

alſo $GK = \frac{fl}{g}$.

DF : DC = DG : DK,

oder

oder in Buchſtaben

$g : r = l : DK$;

alſo iſt $DK = \frac{rl}{g}$.

II. $EK = EG - GK$,

d. i. in Buchſtaben

$EK = k - \frac{fl}{g}$,

und unter einerlei Benennung,

$EK = \frac{gK - fl}{g}$

III. $\triangle EHK \backsim \triangle KGD$,

weil H und G rechte Winkel und bei K Vertikalwinkel ſind, folglich

$DK : GD = EK : EH$,

d. i. nach den gefundenen Ausdrücken Nro. I. II.

$\frac{rl}{g} : l = \frac{gk - fl}{g} : \frac{gk - fl}{g} . l : \frac{rl}{g} = EH$

Wenn man nun dieſen Ausdruck wirklich multiplicirt und dividirt, und richtig aufhebt, ſo iſt

$EH = \frac{gk - fl}{g} . \frac{l.g}{rl} = \frac{gk - fl}{g} . \frac{gl}{rl}$

$= \frac{gk - fl}{g} . \frac{g}{r} = \frac{ggk - gfl}{gr}$

$= \frac{gk - fl}{r} = h = EH$.

Wenn der Radius $= 1$, ſo iſt die Differenz $h = gk - fl$.

§. 751.

§. 751. Aus den Sinuſſen zweier Bögen kann man auch den Sinus der Summe dieſer Bögen finden. Bleiben die Buchſtaben, wie vorhin, ſo heißt der Satz:

$$\frac{gh + if}{r} = k = EG.$$

Hier folgen die Beweiſe:

I. $DG : DK = EH : EK$;

oder in Buchſtaben

$$l : \frac{rl}{g} = h, \frac{rlh}{gl} = \frac{rh}{g};$$

alſo iſt $EK = \frac{rh}{g}$

II. $DG : GK = EH : HK$

$DG : GK = DF : FC$ folglich

$DF : FC = EH : HK$

oder in Buchſtaben,

$$g : f = h : \frac{hf}{g},$$

alſo iſt $HK = \frac{hf}{g}$

III. $DK = DH - HK$

d. iſt

$$DK = i - \frac{hf}{g} = \frac{gi - fh}{g}$$

alſo iſt

$$DK = \frac{gi - fh}{g}$$

IIII.

IIII. DC : CF = DK : KG,

in Buchſtaben

$$r : f = \frac{gi - fh}{g} : \frac{fgi - ffh}{gr},$$

alſo iſt

$$KG = \frac{fgi - ffh}{gr}$$

V. EG = EK + KG,

oder

$$EG = \frac{rh}{g} + \frac{gfi - ffi}{rg};$$

unter einerlei Benennung gebracht

$$EG = \frac{rrig + ggfi \; gffi}{rgg};$$

mit g oben und unten aufgehoben

$$EG = \frac{rri + gfi - ffi}{rg};$$

ſchicklicher ausgedrückt

$$EG = \frac{(rr - ff)\,h + gfi}{rg}$$

da aber rr − ff = gg (nach §. 717.), ſo gibt dieſes, ſubſtituirt,

$$EG = \frac{ffi + gfi}{rg},$$

durch f oben unten aufgehoben gibt

$$EG = \frac{gi + fi}{r} = k.$$

diß war zu erweiſen.

Iſt r = 1, ſo iſt k = EG = gi + fi.
Drückt man den Lehrſatz nach der Bedeutung der Buchſtaben aus, und nennt die zween Bogen x und y, ſo iſt der Sinus (x + y)

= (Cos. x. Sin. y + Sin. x. Cos. y)

Wenn x — y, ſo iſt Sin. (x + y) = Sin. 2 x

= (Cos. X. Sin. X. + Sin. X. Cos. X.)

= 2 (Sin. X. Cos. X.)

Tab. 10. Fig. 145.

§. 752. **Der Coſinus von der Summe zweier Bögen iſt gleich dem Product der beiden** *Coſinuum* **weniger dem Product der beiden** *Sinuum* **der einzelnen Bögen.** Tab. 10. Fig 145.

Zieht man aus dem Punct H benannter Figur die Linie HL mit GB parallel, und fällt aus H die Perpendicularlinie HI auf BD herab, ſo iſt der Satz leicht zu erweiſen.

Der Satz iſt:

(Cos. x. Cos. y) — (Sin. x. Sin. y) = Cos. x + y.

Der Beweis wird auf folgende Art geführt.

I. DC: DF = DH: DI

oder, im Werth dieſer Linien,

1 : Cos. x = Cos. y: DI,

alſo iſt DI = (Cos. x. Cos. y).

II. Weil ferner das Dreieck EHL ähnlich iſt dem Dreieck KHL, ähnlich dem Dreieck KDG, ähnlich dem Dreieck CDF,

ſo iſt DC: CF = EH: HL

d. i. im Werth der Linien,

1 : Sin. x = Sin. y: HL,

alſo iſt HL = (Sin. x. Sin. y).

III.

III. $\text{Cos.}(x+y)=DG=DI-GI=DI-HL$; da aber $DI-HL=(\text{Cos.}x.\ \text{Cos.}y)-(\text{Sin.}x\ \text{Sin.}y)$ ſo iſt $\text{Cos.}(x+y)=\text{Cos.}x.\ \text{Cos.}y)-(\text{Sin.}x.\ \text{Sin.}y)$.

IIII. Wenn $x=y$, ſo iſt $\text{Cos.}\,2x=(\text{Cos.}x)^2-(\text{Sin.}y)^2$.

V. Kraft des unmittelbaren Gegenſatzes iſt $\text{Cos.}(x-y)=(\text{Cos.}x\ \text{Cos.}y)+(\text{Sin}\ x.\ \text{Sin.}y)$.

VI. Wenn $x=y$, ſo iſt $\text{Cos.}(x-x)=\text{Cos.}\,0=(\text{Cos.}x)^2+(\text{Sin.}x)^2=1$.

VII. Weil Tangens $x=\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}$, ſo iſt auch Tangens $(x+y)=\frac{\text{Sin.}(x+y)}{\text{Cos.}(x+y)}$ folglich, wenn man obige Werthe ſubſtituirt, iſt $\text{Tang.}(x+y)=(\text{Sin.}x.\ \text{Cos.}y)+(\text{Cos.}x.\ \text{Sin.}y)=(\text{Cos.}x.\ \text{Cos.}y)-(\text{Sin.}x.\ \text{Sin.}y)$.

§. 753. Der Coſinus des Bogens x, wenn er mit ſeinem Sinus, der durch $\sqrt{-1}$ multiplicirt iſt, zur Dignität n erhoben, und durch den Radius in der Dignität n dividirt wird, iſt der Summe gleich, welche aus dem Coſinus vom n fachen Bogen, und aus dem mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Sinus dieſes n fachen Bogens entſteht und durch den Radius dividirt wird.

$$\frac{(\text{Cos.}x+\text{Sin.}x.\sqrt{-1})}{r}\cdot\frac{(\text{Cos.}x-\text{Sin.}x.\sqrt{-1})}{r}=1.$$

Wenn ſtatt des zweiten Factors $(\text{Cos.}x-\text{Sin.}x.\ \sqrt{-1})$

der neue Factor (Cos. y + Sin. y $\sqrt{-1}$) geſetzt wird, ſo iſt

$$\frac{(\text{Cos. }x + \text{Sin. }y\sqrt{-1})}{r} \cdot \frac{(\text{Cos. }y + \text{Sin. }y\sqrt{-1})}{r}$$

wenn man wirklich multiplicirt

$$= \frac{(\text{Cos. }x.\ \text{Cos. }y - \text{Sin. }x.\ \text{Sin. }y)}{rr}$$

$$+ \frac{(\text{Cos. }x.\ \text{Sin. }y + \text{Sin. }x.\ \text{Cos. }y)\sqrt{-1}}{rr};$$

da aber

$$\frac{(\text{Cos. }x.\ \text{Cos. }y - \text{Sin. }x.\ \text{Sin. }y)}{r} = (\text{Cos. }x + y)$$

und $\frac{(\text{Cos. }x.\ \text{Sin. }y + \text{Sin. }x.\ \text{Cos. }y)}{r}$

$= (\text{Sin. }x + y)$,

ſo iſt

$$\frac{(\text{Cos. }x + \text{Sin. }x\sqrt{-1}) \cdot (\text{Cos. }y + \text{Sin. }y\sqrt{-1})}{rr}$$

$$= \frac{(\text{Cos. }(x + y) + (\text{Sin. }x + y\sqrt{-1})}{r}$$

Es ſei $x = y$

ſo iſt $\frac{(\text{Cos. }x + \text{Sin. }x\sqrt{-1}) \cdot (\text{Cos. }x + \text{Sin. }x\sqrt{-1})}{rr}$

$$= \frac{\text{Cos. }2x + \text{Sin. }2x\sqrt{-1})}{r}$$

das iſt

$$\frac{(\text{Cos. }x + \text{Sin. }x\sqrt{-1})^2}{rr} = \frac{(\text{Cos. }2x + \text{Sin. }2x\sqrt{-1})}{r}$$

und

und

$$\frac{(\text{Cos.}\,x + \text{Sin.}\,x\,\sqrt{-1})^3}{rrr} = \frac{(\text{Cos.}\,3x + \text{Sin.}\,3x\,\sqrt{-1})}{r}$$

und allgemein iſt

$$\frac{(\text{Cos.}\,x + \text{Sin.}\,x\,\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{(\text{Cos.}\,nx + \text{Sin.}\,nx\,\sqrt{-1})}{r}.$$

und dieſe letztere Formel drückt den Lehrſatz §. 753. aus.

§. 754. Weil die Rechnung bei negativen Zeichen eben dieſe Regeln befolgt, ſo wird aus gleichem Grund

$$(\text{Cos.}\,x - \text{Sin.}\,x\,\sqrt{-1}) \,.\, (\text{Cos.}\,y - \text{Sin.}\,y\,\sqrt{-1})$$
$$= (\text{Cos.}\,(y+x) - \text{Sin.}\,(y+x)\,\sqrt{-1}).$$

Alſo iſt

$$\frac{(\text{Cos.}\,x \pm \text{Sin.}\,x\,\sqrt{-1})^2}{r^2} = \frac{(\text{Cos.}\,2x \pm \text{Sin.}\,2x\,\sqrt{-1})}{r}$$

und allgemein iſt

$$\frac{(\text{Cos.}\,x \pm \text{Sin.}\,x\,\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{(\text{Cos.}\,nx \pm \text{Sin.}\,nx\,\sqrt{-1})}{r}$$

eine fruchtbare Formel, wo der Exponent n, nach der Vorausſetzung, eine ganze Zahl iſt.

§. 755. Wenn Z einen Bogen bedeutet, ſo läßt ſich der Sinus von dem n fachen Bogen oder der Sin. nZ bald finden. Es iſt

$$\frac{(\text{Cos.}\,Z + \text{Sin.}\,Z\,\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{(\text{Cos.}\,nZ + \text{Sin.}\,nZ\,\sqrt{-1})}{r}$$

und

$$\frac{(\text{Cos.}\,Z - \text{Sin.}\,Z\,\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{(\text{Cos.}\,nZ - \text{Sin.}\,nZ\,\sqrt{-1})}{r}.$$

 Subtra-

Subtrahirt man, ſo iſt

$$\frac{(\text{Cos.}\,Z+\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n}{r^n}-\frac{(\text{Cos.}\,Z-\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n}{r^n}$$

$$=\frac{2\,\text{Sin.}\,nZ\sqrt{-1})}{r}$$ =. Differenz wird mit r multiplicirt, ſo iſt

$$\frac{(\text{Cos.}\,Z+\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n-(\text{Cos.}\,Z-\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n}{r^{n-1}}$$

$$=2\,\text{Sin.}\,nZ\sqrt{-1};$$

wird mit $2\sqrt{-1}$ dividirt, ſo iſt

$$\frac{(\text{Cos.}\,Z+\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n-(\text{Cos.}\,Z-\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n}{2r^{n}-\sqrt{1}}$$

$$=\text{Sin.}\,nZ.$$

Wird, was oben ſubtrahirt war, addirt, die Summe durch r beiderſeits multiplicirt, und mit 2 dividirt, ſo findet man den Cos. nZ welcher

$$=\frac{(\text{Cos.}\,Z+\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n+(\text{Cos.}\,Z-\text{Sin.}\,Z\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}}$$

Vierter Abſchnitt.

Von Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken, eine Seite mit darunter gerechnet.

§. 756. In einem jeden ungleichſeitigen Dreieck läßt ſich aus zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel die dritte Seite durch Rechnung beſtimmen. Tab. 10. Fig 143.

In dem Dreieck BCD ſeien BC und BD nebſt dem Winkel B gegeben. Man ſuche CD. Aus der

der Natur der trigonometriſchen Linien läßt ſich die Sache durch die Buchſtabenrechnung erweiſen.

BC = a
BD = b
CD = c
Sinus von B = p
Sinus von C = m
Coſinus von B = n
Coſinus von C = t.

Der Satz:

$$Dc = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abn}$$

läßt ſich auf folgende Art beweiſen:

$CDB = 180^\circ - (B + C)$
Sin. CDB = Sin. CDK
Sin. CDK = Sin. (B + C)

---

folglich Sin. CDB = Sin. (B + C
Sin. (B + C) =
I. = mn + tp.

Werden die hier vorkommenden Buchſtaben ſubſtituirt, ſo iſt der Sinus CDB, oder der Sinus D = mn + tp.

Ferner verhält ſich

CD: Sin. B = BC: Sin. D

oder

$c : p = a : \frac{ap}{c} = \text{Sin. } D.$

da aber mn + tp = Sin. D,

ſo iſt

II. $\frac{ap}{c} = mn + tp.$

Weiterhin verhält ſich

CD: Sin. B = BD: Sin. C,

 oder

oder

III. $c : p = b : \frac{bp}{c} = \text{Sin. } C = m$

Nun iſt $(\text{Cos. } C)^2 = +^2 = 1 - (\text{Sin. } C)^2$ (§. 717.)

und im Werth von Sin. CD

$$= 1 - \frac{b^2\ p^2\ 1}{c^2}$$

und unter einerlei Benennung gebracht,

$$= \frac{c^2 - b^2\ p^2}{c^2};$$

alſo iſt

IV. $\text{Cos. } C = t - \frac{\sqrt{(c^2 - b^2\ p^2)}}{c}.$

Weil nun

$\text{Sin. } D = mn + tp$ (Nro. I.)

$= \frac{bpn}{c} + \frac{p \sqrt{c^2 - b^2 p^2}}{c}$ (Nro III. IIII.),

$mn + tp$ aber $= \frac{ap}{c}$ iſt (Nro. II.),

ſo iſt, wenn man ſubſtituirt,

$$\frac{bpn}{c} + \frac{p \sqrt{c^2 - b^2\ p^2}}{c} = \frac{ap}{c}.$$

Wird durch c multiplicirt, ſo bleibt

$$bpn + p \sqrt{(c^2 - b^2 - p^2)} = ap.$$

Wird durch p dividirt, ſo bleibt

$$bn + \sqrt{(c^2 - b^2\ p^2)} = a.$$

Wird bn abgezogen, ſo bleibt

$$\sqrt{(c^2 - b^2\ p^2)} = a - bn.$$

Qua-

Quadrirt man dieſe Differenz, ſo ſteht die Rechnung, wie folgt:

$$c^2 - b^2 p^2 = a^2 - 2abn + b^2 n^2$$

$$c^2 - p^2 b^2 = a^2 - 2abn + b^2 n^2,$$

und

da $n^2 = 1 - p^2$

ſo iſt $c^2 - p^2 b^2 = a^2 - 2abn + b^2 (1 - p^2)$

das iſt $c^2 - p^2 b^2 = a^2 - 2abn + b^2 - p^2 b^2$

$p^2 b^2$ $\qquad$ $p^2 b^2$ add.

gibt $c^2 = a^2 - abn + b^2$

folglich

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2abn)}.$$

§. 757. Aus drei gegebenen Seiten werden die Winkel beſtimmt. Alles bleibe wie vorhin, ſo iſt die Rechnung

$$a^2 + b^2 - 2abn = c^2$$

ſetzt man 2abn herüber, ſo heißt es

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2abn,$$

wird durch 2abn dividirt, ſo iſt

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = n;$$

wird beiderſeits 1 addirt, ſo iſt

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{2ab} = 1 + n.$$

Es iſt aber

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} = 1 + n$$

und eben ſo, wenn man n von 1 ſubtrahirt,

$$2ab - a^2 - b^2 + c = \frac{(c-a+b)\, c+a-b}{2ab.} = 1 - n$$

Zieht man aus dem beiderſeitigen Product die Quadratwurzel, ſo iſt

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c-a+b)\,(c+a-b)}}{2ab}$$

$$= \sqrt{(1-n^2)} = p, \text{ denn } 1-n^2 = p^2.$$

(§. 717.), da man nun p^2, folglich auch p den Sinus eines Winkels aus den drei Seiten gefunden, ſo hat man den Winkel, und kann die übrigen Winkel leicht finden.

§. 758. Aus einer Seite und zween Winkeln, oder aus zwo Seiten und einem Winkel, der aber nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, laſſen ſich (§. 742.) die übrigen Stücke leicht beſtimmen. Tab. 10. Fig. 146.

Wenn BD, B und C gegeben ſind, ſo verhält ſich

I. Sin. C: BD = Sin. B: CD

$$= \frac{BD.\ Sin.\ B}{Sin.\ C.}$$

Wenn B und D nebſt BD gegeben ſind, ſo iſt auch aus B und D der Winkel C gegeben, nemlich

$$= 180^\circ - (B+D),$$

folglich

II. { Sin. 180 — (B+D): BD = { Sin. D: BC
Sin. C: BD = = Sin. B: CD }
Tab. 10. Fig. 147.

§. 759. Weil der Sinus D oder B oder D auch dem Sinus des Nebenwinkels gleich, folglich der Sinus eines ſtumpfen und ſpitzigen Winkels ſeyn kann (§. 709.), ſo muß man wiſſen, ob der geſuchte Winkel ſpitzig oder ſtumpf iſt, d. i. ob das ungleichſeitige Dreieck ſtumpfwinklicht oder ſpitzwinklicht iſt, weil ſonſt die Aufgabe unbeſtimmt wäre.

§. 760. **In einem rechtwinklichten Dreieck kann man aus den zwo Seiten nebſt dem eingeſchloſſenen rechten Winkel die übrigen Winkel und Seiten finden. Tab. 10. Fig. 148.**

Zieht man aus D mit dem Halbmeſſer DB den Bogen BE, ſo iſt BC die Tangente von D, folglich

DB : BC = Sin. tot.: Tang. von D,

hat man D gefunden, ſo findet man die dritte Seite nach §. 757. I.

§. 761. **Aus drei Seiten eines ungleichſeitigen Dreiecks laſſen ſich die drei Winkel finden. Tab. 10. Fig. 149.**

Im Dreieck BDC ſeien die Seiten BD und DC und BC gegeben. Man beſchreibe aus dem Punct D mit der kleinſten Seite DC als dem Halbmeſſer, einen Cirkel ICEG. Man verlängere BD bis an den Umfang des Cirkels I, ſo iſt

BI = (BD + DC), und
BG = (BD − DC), weil
DG = DC = DI = Halbmeſſer.

Ferner

Ferner

$$BC : BI = BG : BE,$$

d. i. $BC : (BD + DC) = (BD - DC) : BE$

Hat man BE gefunden, ſo hat man auch EC = (BC — BE). Fällt man von D den Perpendikel DH auf EC, ſo iſt EH = HC nach §. 448. folglich HC = $\frac{1}{2}$ EC. Man hat alſo in dem Dreieck DCH die Seite DC und CH und den rechten Winkel bei H, woraus man HDC und C findet (§. 757.). Eben ſo hat man im Dreieck BDH die Seiten BD und BH = (BE + EH) und den rechten Winkel bei H, woraus man BDH und B findet (§. 757.), folglich werden durch dieſe Reduction alle Winkel gefunden.

Fünfter Abſchnitt.

Von Anwendung der trigonometriſchen Lehrſätze auf die Polygone.

§. 762. Die Seite eines regulairen Vielecks läßt ſich aus dem Winkel am Mittelpunct durch

Tab. 4. Fig. 68.

Dieſe Seite iſt in der bezeichneten Figur

$$\frac{2BK. \text{Sin.} \tfrac{1}{2} BKC;}{r}$$

oder

Wenn BK = a,

BKC = v

BC = b,

ſo iſt $b = \frac{2a. \text{Sin.} \tfrac{1}{2} v.}{r}$

Der

Der Beweis iſt folgender:

Man theile BC durch den Perpendikel KA in zween gleiche Theile, ſo iſt BA = BA und bei A rechte Winkel, das Dreieck BKA = CKA, folglich der Winkel bei K in zween gleiche Theile getheilt, daher entſteht folgende Proportion:

$$r : BK = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ BKC : BA,$$

d. i. in Buchſtaben

$$r : a = (\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ v) : \left(\frac{a.\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ v}{r}\right) = BA.$$

Wird durch 2 multiplicirt, ſo iſt

$$\frac{2a.\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ v}{r} = 2BA;$$

da nun 2 BA = BC, ſo iſt

$$\frac{2a.\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ v}{r} = BC = b$$

Aus dem Ausdruck für b läßt ſich a, oder der Halbmeſſer des Polygons finden. Weil

$$\frac{2a.\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ v}{r} = b, \text{ ſo iſt}$$

$$2a.\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\ v = rb,$$

wird durch 2 Sin. $\frac{1}{2}$ v dividirt, ſo iſt

$$a = \frac{rb}{2\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2} v.}$$

Das Product des Sinus totus in die Seite des Polygons dividirt durch den doppelten Sinus des halben Centriwinkels iſt der Halbmeſſer des Polygons.

§. 763. Die Fläche eines jeden regulairen Vielecks läßt ſich trigonometriſch berechnen. Sie iſt, wenn die Anzahl der Centriwinkel n iſt,

$$\frac{n.\ r.\ \text{Sin.}\ v}{2}$$

Bleibt alles, wie vorhin, und der Perpendikel KA heißt e, ſo verhält ſich

I. der Sinus totus zu BK, wie ſich der Sinus KBA zu KA verhält; da aber der Sinus KBA gleich iſt dem Coſinus BKA, ſo verhält ſich der Sinus totus zu BK, wie ſich der Coſinus BKA verhält zu KA; d. i. in Buchſtaben:

$$r : a = \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\ v : KA$$
$$= \frac{a.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ v = C.}{r}$$

II. Das Dreieck BKC iſt gleich $\frac{BC.\ KA}{2}$ (§. 518. 519)

d. i. in Buchſtaben:

Das Dreieck BKC iſt gleich $\frac{be.}{2}$

Im Werth von e nach Nro. I. iſt es gleich

$$\frac{ba.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ v}{2r.}$$

Im Werth von b nach §. 762. iſt es gleich

$$\frac{2a.\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}\ v.\ a.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{2}\ v.}{2.\ rr}$$

Hebt

Hebt man auf, was ſich aufheben läßt, und druckt es ſchicklicher aus, ſo ſteht

$$\frac{a^2 \text{Sin.} \frac{1}{2} v \text{ Cos.} \frac{1}{2} v.}{rr}$$

Da aber $\frac{2 \text{ Sin.} \frac{1}{2} v. \text{ Cos.} \frac{1}{2} v}{r}$ gleich iſt dem Sinus v nach §. 746., folglich ſubſtituirt

$$\frac{a^2 \text{ Sin. } v}{2r} = \frac{be}{2};$$

Iſt nun $r = a$; ſo iſt $\frac{r. \text{Sin. } v}{2} = \frac{be}{2}$,

und die ganze Fläche des Polygons,

$$\frac{nr. \text{ Sin. } v}{2} = \frac{nbe.}{2}$$

§. 764. Ein anders Vieleck habe Seiten $= N$; und deſſen Centriwinkel ſei $= V$, ſo iſt ſeine Fläche

$$= \frac{N. \; r. \text{ Sin. } V.}{2}$$

Man heiſſe die Fläche Q und die vorige q, ſo verhält ſich

$$Q \text{ zu } q, \text{ wie } \frac{Nr. \text{ Sin. } v}{2} \text{ zu } \frac{nr. \text{ Sin. } v}{2};$$

Wird durch $\frac{r}{2}$ dividirt, ſo bleibt

$$Q : q = (Sr. \text{Sin. } V) : n - \text{Sin.} v.$$

Iſt $V = \frac{1}{2} v$; ſo iſt nach §. 746.

$$\text{Sin. } v = \frac{(2 \text{Sin.} V. \text{ Cos.} V)}{r};$$

folglich

folglich in dieſem Fall

$$q : Q = n. \frac{(2\,\text{Sin. V. Cos. V})}{r} : (\text{N. Sin. V}) :$$

Wird mit Sin. V. multiplicirt, ſo bleibt

$$q : Q = \frac{2\,\text{n. Cos. V}}{r} : \text{N.}$$

Wird mit r multiplicirt, ſo iſt

$$q : Q = (2\text{n. Cos. V}) : (\text{r. N}).$$

Da nun 2n = M (§. 530.)

ſo iſt q : Q = Cos. V : r.

Die Flächen zweier Vielecke, davon das zweite noch ſo viel Seiten als das erſte hat, verhalten ſich wie der Coſinus vom Centriwinkel des Vielecks von mehreren Seiten zum Halbmeſſer.

Sechster Abſchnitt.

Von der Berechnung der Sinus und der Logarithmen nebſt dem Gebrauch der Tafeln.

§. 765. **Unter allen trigonometriſchen Linien** ſind nur drei, welche ſich genau durch Rechnung finden laſſen, nemlich der Sinus totus, der Sinus von 30° und die Tangente von 45°; die übrigen alle ſind nur beinahe wahr. Der Sinus totus iſt der Halbmeſſer, welcher 10,000 Millionentheile als ſo viel Einheiten enthält. Der Sinus von 30° iſt der halbe Halbmeſſer, folglich die Hälfte von den angenommenen Einheiten. Die

Tangente

Tangente von 45° iſt dem Halbmeſſer gleich. Da der erſte Satz klar iſt, ſo müſſen die zween letztern bewieſen werden.

Beweis des Satzes:

Sin. 30° = $\frac{1}{2}$ r.

Tab. 10. Fig. 144.

Iſt ABC = 60°, ſo iſt das Dreieck ABC gleichſeitig.

ABD iſt gleich DBC = 30°,

und auch die Dreiecke; folglich iſt

AD = DC = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ r;

da aber AD = Sin. 30°, ſo iſt der Sinus 30° = $\frac{1}{2}$ r.

Beweis des Satzes:

Tang. 45° = r.

Tab. 10. Fig. 148.

Es ſei CDB = 45°, ſo iſt CB = Tang. 45°; alſo B = 90°, folglich auch DCB = 45°; daher iſt das Dreieck DCB gleichſchenklich, und DB = BC, d. i. r = Tang. 45°.

§. 766. Weil man die übrigen Sinus nicht genau finden kann, ſo hat man den Halbmeſſer in ſo viel millionengleiche Theile getheilt, und die übrigen Sinus, die alle kleiner ſind, nach §. 716. als Brüche von ihm angeſehen, bei welchen der Fehler nicht einmal ein Milliontheilgen beträgt, wenn man die obige Eintheilung annimmt, und dieß iſt auch bei ziemlich großen Cirkeln ein kaum merklicher Fehler.

§. 767. Weil die Sehne AC gleich 2 AD = 2 Sin. $\frac{1}{2}$ u iſt, ſo kann man die Sehnen aller Winkel von 2 zu 2 Graden oder Minuten für einen gegebenen Halbmeſſer finden; hieraus entſteht der ſogenannte geradlinige Transporteur, auf welchen man gemeiniglich die Sehnen nur von 5 zu 5 Graden trägt und die dazwiſchen fallende wie bei dem verjüngten Maasſtabe beinahe zu beſtimmen ſucht.

§. 768. Unter allen trigonometriſchen Zahlen ſind der Sinus totus nebſt ſeinem Logarithmus, der Sinus von 30°, und die Tangente von 45° nebſt ihrem Logarithmus, wie auch die Logarithmen der Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, ſo weit ſie berechnet ſind, in den Tafeln genau, die übrigen alle aber nur beinahe wahr. Von den erſten drei Zahlen erhellt der Beweis aus §. 764. denn der Logarithme des Sinus totus und der Tangente von 45 ſind einerlei; und der Sinus 30 iſt der halbe Halbmeſſer; ſein Logarithmus iſt, ſchon irrational. Von den folgenden aber ergibt ſich der Beweis aus der in den Tafeln angenommenen Progreßion, 1, 10, 100, 1000 u. ſ. w. und aus den Logarithmen 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. mit den angehängten Nullen wegen der Decimalfractionen.

§. 769. Der Logarithme des Sinus 0 wird unrichtig in den Tabellen = 0 geſetzt. Dann wenn dieſer Logarithme Null war, ſo müßte der Sinus

von 0 Grad = 1 ſeyn, nach §. 286. Er iſt aber nicht 1, ſonſt wäre 0° = 90°; welches widerſinniſch iſt.

§. 770. Was den Gebrauch der Tafeln betrifft, ſo ſtehen alle Bogen, welche zuſammen 90 Grade betragen, beiſammen. Sie fangen z. B. an auf der erſten Columne Null Grad, und gerade gegen über in der andern Columne 89 Grad 60 Minuten, welches 90 Grade beträgt. Mit 45 Graden hören die Bogen auf (nemlich auf der einen Seite 44 Grade, 60 Minuten, auf der andern 45 Grad, keine Minute), weil dieſe beide Maaſe, zuſammen addirt, 90 Grade betragen. Es machen alſo durchgehends zwei gegenüberſtehende Bogen in Graden zuſammen 90 Grade. Daß die Bogen unter 45 Graden und ihre Complemente zu 90 Graden beiſammen ſtehen, iſt ſehr bequem, dann der Sinus des gegenüberſtehenden Bogens iſt der Coſinus des erſten, und umgekehrt, und die dabei ſtehenden Logarithmen ſind alſo wechſelsweiſe die Logarithme der Sinus und der Coſinus. Eben dieſes gilt von Tangenten und Cotangenten.

§. 771. Nach den logarithmiſchen Tafeln der Sinus und der Tangenten folgen die Logarithmen der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen, die man braucht, wenn man eine gerade Linie, die in Zahlen gegeben iſt, in die Rechnung bringt. Bei dieſen Logarithmen kann man den

Vortheil gebrauchen, daß man, wenn eine Linie geſucht wird, die man anfänglich in Schuhen gefunden hat, wobei aber noch etwas übrig blieb, und der Logarithme der gefundenen Zahl nicht genau correſpondirte, dieſen nemlichen Logarithmen unter der unmittelbar folgenden Charakteriſtik, die das zehenfache der vorigen iſt, aufſuche, da alsdenn die correſpondirende Zahl der natürlichen Zahlzeichen geometriſche Zolle geben wird, weil ein geometriſcher Schuh mit 10 multiplicirt, ſo viel geometriſche Zolle gibt. Correſpondirt die Zahl noch nicht genau, ſo ſucht man ſie in der folgenden Characteriſtik und bekommt Linien. In dieſem Fall iſt es gut, wenn man Tafeln hat, wo die Logarithme für die natürliche Zahlen bis auf Millionen berechnet ſind, damit man deſto mehr Characteriſtike bekomme. Nach folgendem Beiſpiel kann man die logarithmiſche Rechnung in der praktiſchen Trigonometrie, und in ſolchen Wiſſenſchaften, die auf ſie einen Bezug haben, anwenden.

Es ſei Tab. 10. Fig. 146. die Linie BD in Schuhen gegeben, und zwar = 18. Der Winkel

$B = 30°$, und $C = 80°$.

Man ſuche CD, ſo iſt

$\mathrm{Sin.}\ C : BD = \mathrm{Sin.}\ B : CD$,

oder im Werth,

$\mathrm{Sin.}\ 30° : 18' = \mathrm{Sin.}\ 80° : CD$

$$= \frac{18'.\ \mathrm{Sin.}\ 80°}{\mathrm{Sin.}\ 30°}$$

Be-

Berechnet man nun dieſes logarithmiſch, und erinnert ſich, daß durch die Logarithme die Multiplication in eine Addition, und die Diviſion in eine Subtraction verwandelt werde, ſo addirt man die Logarithmen (18 und 80°) zuſammen, und ſubtrahirt von der Summe den Logarithmen von 30°. Man ſucht ſie alſo in den Tafeln auf, und zwar den erſten in den Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen, die andern in den Tafeln der Sinuum.

Log. 16 =	1,2041200
Log. Sin. 80° =	9,9933515
Summe =	11,19.7.4715
Log. Sin. 30° =	9 69 8 9700
Log. BD =	1,49 8 5015

oder die Differenz.

Dieſen Logarithmen ſchlägt man in den Tafeln der natürlichen Zahlzeichen auf, weil CD eine Seite des geradelinigten Dreiecks iſt, welchen 31 am nächſten correſpondirt, d. i. 31′. Um aber die Sache genauer zu wiſſen, ſo ſucht man dieſen Logarithmen unter der Charakteriſtik 2, da dann 315, d. i. 31′ 5″ am nächſten correſpondiren. Um die Sache noch genauer zu haben, ſuche man ihn auch unter der Charakteriſtik 3, dem 1352‴, am nächſten kommen, alſo hat man noch 2‴,

folglich iſt CD = 31′ 5″ 2‴.

Hat man weitere Charakteriſtike, ſo kann man in Zehentheilgen einer Linie u. ſ. w. es noch genauer finden.

Statt der Tafeln, welche von Neper, Brigge, Vlacq u. ſ. w. bekannt ſind, ſetzen wir den Titel derjenigen her, welche Freiherr von Wolff, der

 jene

jene Männer benützte und ſein Eigenes hinzuthat, herausgegeben hat. Er heißt:

Tabulae Sinuum atque Tangentium tam naturalium, quam artificialium, una cum Logarithmis numerorum vulgarium ab 1 usque ad 10000; et numeris quadratis ac cubicis ab 1 usque ad 1000. Edidit, praefatus eſt et regulam univerſalem ſolvendi omnia triangula tam plana quam ſphaerica, praemiſit Chriſtian L. B. de *Wolff.*

Dieſe Wolffiſchen Tafeln werden, wenn man ſie nach der gegebenen Vorſchrift benützt, den verlangten Nutzen ſchaffen.

Fragmente aus der höhern Mathematik.

Fragmente aus der höhern Mathematik.

§. 772. Unerachtet die höhere Mathematik für junge Wundärzte überflüſſig und zu ſchwer iſt auch mehr Kenntniſſe vorausſetzt, als in dieſem Compendium angezeigt worden ſind, ſo ſind dennoch nachſtehende wenige Sätze, welche vorzüglich auf die optiſchen Wiſſenſchaften ihren Bezug haben, nicht ganz entbehrlich.

§. 773. Diejenige Figur, welche entſteht, wenn man einen Kegel zerſchneidet, wird ein Kegelſchnitt genannt.

§. 774. Ein Kegel kann auf verſchiedene Weiſe von einer ebenen Fläche durchſchnitten werden, nemlich 1) durch die Spitze, 2) mit der Grundfläche parallel, 3) durch einen parallelen Schnitt mit einer ſeiner Seiten 4 und 5) durch ſchiefe Schnitte.

§. 775. Wenn der Durchſchnitt durch des Kegels Spitze B und durch der Grundfläche Mittelpunct E, d. i. gerade nach der Länge der Axe BE geht, ſo iſt der Durchſchnitt BCF ein Triangel. Tab. 5. Fig. 93.

§. 776. Wird ein Kegel ſo durchſchnitten, daß der Schnitt GI mit der Grundfläche CF parallel iſt, ſo bekommt man einen Cirkel. Tab. 5. Fig. 93.

§. 777. Wird ein Kegel mit einer ſeiner Seiten parallel geſchnitten, ſo heißt die Figur des Schnitts eine Parabel. Tab. 6. Fig. 106.

Es ſei AB die Seite des Kegels; ab die Axe des Durchſchnitts und mit AB parallel, ſo iſt cbd die Parabel.

§. 778. Wird ein Kegel ſo geſchnitten, daß ſich des Schnittes Axe ba herabwärts immer weiter von des Kegels entgegengeſetzter Seite BC entfernt, und alſo die Seite BC und des Schnittes Axe ba, wenn ſie über des Kegels Spitze B verlängert würden, in einem Punct D zuſammenſtoſſen müßten, ſo nennt man die Figur des Durchſchnitts cbd eine Hyperbel. Tab. 6. Fig. 107.

§. 779. Wird ein Kegel dergeſtalt durchſchnitten, daß ab oder die Axe der- durch den Schnitt entſtandenen Fläche, wenn ſie verlängert würde, mit dem- gleichfalls verlängerten Durchmeſſer AC, als der Grundfläche des Kegels, zuſammenſtoßt, wie hier in D geſchieht, ſo iſt der Durchſchnitt eine Ellipſe. Tab. 6. Fig. 108.

Wiederholung
der
Erklärungen, Grundſätze, Lehrſätze
und
Aufgaben.

Wiederholung der Erklärungen, Grundſätze, Lehrſätze und Aufgaben.

I. Aus der Mathematik überhaupt.

1. Mathematik iſt eine Wiſſenſchaft der Größen. 3.

2. Eine Größe heißt, was einer Verminderung oder Vermehrung fähig iſt. 4.

3. Meſſen heißt, unterſuchen, wie vielmal eine Größe, die man als bekannt anſieht, in jeder der andern Größen enthalten iſt. 6.

4. Es gibt eine gemeine und gelehrte mathematiſche Erkenntniß der Größe. 8.

5. Die Mathematik wird in die reine und angewandte eingetheilt.

6. In der reinen Mathematik läßt ſich die Größe von allen andern Eigenſchaften einer Sache abgeſondert betrachten, in der angewandten betrachtet man zugleich die andern Eigenſchaften der Sachen mit, bei denen ſich die Größe befindet. 9.

7. Man kann die Größe blos als eine Menge von Theilen, als ein Ganzes betrachten; oder man kann zugleich auf die Verbindung und Ordnung dieſer Theile ſehen, welche ein gewiſſes zuſammengeſetztes Ding ausmacht. 10.

8. Das

8. Das Ganze iſt mit ſeinen Theilen einerlei, alle Theile des Zuſammengeſetzten aber ſind nicht einerlei. 11.

9. Eine jede Größe iſt ſich ſelber ſelber gleich und eine jede Größe iſt ihren wirklichen Theilen zuſammengenommen gleich. 11. I.

10. Wenn zwo Größen einer dritten gleich ſind, ſo ſind ſie einander ſelber gleich. 11. II.

11. Wenn man Gleiches zu Gleichem addirt, ſo kommt Gleiches heraus; wenn man aber Gleiches zu dem Größern und zu dem Kleinern addirt, ſo iſt die Summe im erſtern Fall größer, als in dem andern. 11. III.

12. Wenn man Gleiches von Gleichem ſubtrahirt, ſo bleibt Gleiches übrig; wenn man aber Gleiches von dem Größern und Kleinern ſubtrahirt, ſo bleibt in dem erſtern Fall mehr übrig, als in dem andern. 11. IV.

13. Wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt, ſo kommt Gleiches heraus; wenn man aber das Größere und das Kleinere durch Gleiches multiplicirt, ſo iſt das Product im erſten Fall größer, als in dem andern. 11. V.

14. Wenn man Gleiches mit Gleichem dividirt, ſo kommt Gleiches heraus; wenn man aber das Größere und das Kleinere durch Gleiches dividirt, ſo iſt der Quotient in dem erſten Fall größer, als in dem andern. 11. VI.

15. Was

15. Was größer oder kleiner iſt, als die eine von zwoen gleichen Größen, das iſt auch größer oder kleiner, als die andere von ihnen. 11. VII.

II. Aus der Arithmetik.

a) Ganze Zahlen.

16. Die Arithmetik lehrt, wie man aus einigen gegebenen Zahlen andere finden ſoll, von welchen eine Eigenſchaft in Anſehung der gegebenen Zahlen bekannt gemacht wird. 12. 24.

17. Diejenigen Dinge, die eine Zahl ausmachen, müſſen Dinge von einer Art ſeyn. 25.

18. Dinge von einer Art ſind ſolche, bei denen blos dasjenige betrachtet wird, was ſie mit einander gemein haben. 26.

19. Dasjenige, was die Dinge, die zuſammengezählt werden, gemein haben, heißt die Einheit. 27.

20. Eine Zahl heißt eine Menge Einheiten. 27.

21. Eine Zahl wird vermehrt oder vermindert. Wird ſie vermehrt, ſo kommen mehr Zahlen hinzu; ſind dieſe Zahlen der gegebenen nicht gleich, ſo heißt die Rechnungsart eine Addition; ſind die Zahlen der gegebenen gleich, ſo heißt die Rechnungsart eine Multiplication. 29. 30.

22. Wird eine Zahl vermindert, ſo kommen Zahlen von ihr hinweg. Wird die hinwegenom-

mene

mene Zahl einmal wegenommen, ſo heißt die Rechnungsart die Subtraction; wird ſie ſo oft weggenommen, als es möglich iſt, ſo heißt die Rechnungsart Diviſion. 32. 33.

23. Addiren heißt alſo eine Zahl finden, die verſchiedenen andern gegebenen Zahlen zuſammengenommen gleich iſt. Die gefundene Zahl wird die Summe genannt, die gegebenen heiſſen die ſummirenden. 29.

24. Multipliciren heißt eine Zahl etlichemal zu ſich ſelbſt addiren. Was herauskommt, nennt man das Product. Die Zahlen, woraus das Product entſteht, nennt man Factoren. 30.

25. Subtrahiren heißt, von einer gegebenen Zahl eine andere nach Belieben wegnehmen. Was übrig bleibt, heißt Differenz. 32.

26. Dividiren heißt eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen Zahl ſo oft abziehen, als es möglich iſt. Die Zahl, welche dividirt wird, heißt Dividendus. Die Zahl, womit man dividirt, Diviſor. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Diviſor ſich vom Dividendus habe abziehen laſſen, Quotient. 33. 34.

27. In der Mathematik ſind beſonders drei Hauptſätze zu merken, der Satz der Gleichheit, der Aehnlichkeit, der Congruenz. 36.

28. Gleiche Dinge ſind, welche einerlei Größe haben. Aehnliche Dinge ſind, bei welchen alles einerlei iſt, die Größe ausgenommen. Congruent nennt man gleiche und ähnliche Dinge zugleich. 36.

29. Wie ſoll man eine Zahl, die mit Ziffern geſchrieben iſt, mit Worten ausſprechen? 38—40.

30. Wie ſoll man verſchiedene Zahlen zuſammen addiren? 41.

31. Wie ſoll man eine kleine Zahl von einer großen abziehen? 42.

32. Wie kann man das Einmal Eins verfertigen, und überhaupt multipliciren? 44—47.

33. Wie kann man zwo Zahlen mit einander dividiren? 48—54.

b) Potenzen.

34. Ein Product aus zween gleichen Factoren heißt ein Quadrat, und der Factor, der mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, ſeine Wurzel. 56.

35. Ein Product aus drei gleichen Factoren heißt ein Würfel, und jeder dieſer Factoren heißt Cubikwurzel. 57.

36. Ein Product aus lauter gleichen Factoren heißt auch eine Potenz des Factors, der in dieſem Product etlichemal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird. Der Grad der Potenz heißt die Menge von gleichen Factoren, und die Wurzel heißt einer dieſer Factoren. 58.

37. Die Wurzel eines gewiſſen Grads aus einer Zahl ziehen, heißt dieſe Zahl als eine Potenz ſelbigen Grads anſehen, und die Zahl ſuchen, die, ſo vielmal mit ſich ſelbſt multiplicirt, als der Grad der Potenz erfordert, die gegebene Zahl hervorbringt. 60.

c) Brüche.

38. Wenn ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilt wird, und deren einige genommen werden, ſo heißt dieſes Stück, in Vergleichung mit dem Ganzen, ein Bruch. Diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilt worden, heißt der Nenner. Diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viel Theile angenommen werden, heißt der Zähler. 64—66.

39. Wenn der Zähler kleiner iſt, als der Nenner, ſo heißt der Bruch ein eigentlicher; wenn der Zähler größer iſt, als der Nenner, ein uneigentlicher Bruch. 67.

40. Wenn man den Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, den Zähler aber ungeändert läßt, ſo wird der Bruch um ſo vielmal kleiner, ſo viel Einheiten die ganze Zahl hat. 89.

41. Wenn eines Bruches Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, der Nenner aber ungeändert bleibt, ſo wird der Bruch ſo vielmal größer, ſo viel Einheiten die Zahl hat. 89.

42. Wenn

42. Wenn eines Bruches Zähler und Nenner zugleich mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, ſo bleibt die Größe des Bruchs ungeändert. 72.

43. Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, der Nenner aber ungeändert bleibt, ſo iſt der Bruch mit dieſer Zahl dividirt, oder ſo vielmal kleiner worden. Wenn aber der Nenner mit einer ganzen Zahl bei ungeändertem Zähler dividirt wird, ſo iſt der Bruch mit dieſer Zahl multiplicirt, oder ſo vielmal größer geworden. 69. 87. 88.

44. Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs zugleich durch eine ganze Zahl dividirt werden, ſo bleibt die Größe des Bruchs unverändert. 67.

45. Was heißt einen Bruch aufheben? und wie hebt man ihn auf? 74.

46. Wie bringt man zween oder mehr Brüche unter eine Benennung? 73.

47. Wie addirt man zween oder mehr Brüche? 77. I.

48. Wie ſubtrahirt man zween Brüche? 77. II.

49. Wie wird ein Bruch mit einem Bruch multiplicirt? 82.

50. Wie werden Brüche durch Brüche dividirt? 87.

51. Wie addirt man eine ganze Zahl zu einem Bruch? 78.

52. Wie wird ein Bruch von einer ganzen Zahl ſubtrahirt? 79.

53. Wie wird eine ganze Zahl von einem Bruch abgezogen? 80.

54. Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl, und eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt? 86.

55. Wie kann eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden? 88.

56. Wie kann ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden? 89.

57. Wie rechnet man mit Zahlen, wo Brüche an ganzen Zahlen hängen? 90.

d) Entgegengeſetzte Größen.

58. Entgegengeſetzte Größen nennt man Größen, die in einer ſolchen Verhältniß gegen einander ſtehen, daß eine die andere vermindert. Eine von dieſen Größen heißt poſitiv, die andere negativ. 91.

59. Wie addirt man entgegengeſetzte Größen? 96.

60. Wenn eine Größe aus zwei Stücken beſteht, da das zweite von dem erſten abgezogen iſt, ſo heißt dieſe ganze Größe von einer andern abziehen ſo viel, als das erſte Stück abziehen und das zweite addiren. 98.

61. Eine

61. Eine Größe abziehen, heißt die ihr entgegengeſetzte addiren. 99.

62. Wie ſoll man Größen mit einerlei oder verſchiedenen Zeichen von einander abziehen? 99.

63. Wenn man mit entgegengeſetzten Zahlen rechnet, ſo iſt es verſtattet, die Einheit bejahend anzunehmen. 100.

64. Eine bejahende Größe mit einer verneinenden multiplicirt, gibt ein verneinendes Product. 101.

65. Eine verneinende Größe mit einer bejahenden multiplicirt, gibt ein verneinendes Product. 102.

66. Zwo verneinende Größen mit einander multiplicirt, geben ein bejahendes Product. 103.

67. Zween poſitive Factoren geben ein poſitives Product. 104.

68. Einerlei Zeichen beider Factoren geben in der Multiplication plus, und verſchiedene minus. 105.

69. Wie werden Größen multiplicirt, die aus entgegengeſetzten zuſammengeſetzt ſind? 106.

70. Wenn der Diviſor und der Dividendus entgegengeſetzte Zeichen haben, ſo iſt der Quotient negativ. 107.

71. Wenn Diviſor und Dividendus einerlei Zeichen haben, ſo iſt der Quotient poſitiv. 108.

72. Einerlei Zeichen geben bei der Diviſion plus, verſchiedene minus. 109.

73. Wie ſollen Größen mit verſchiedenen Zeichen dividirt werden? 110.

e) Buchſtabenrechnung.

74. Die Buchſtabenrechnung iſt eine Wiſſenſchaft, welche die Größen durch allgemeine Zeichen ausdruckt, und lehrt, wie man mit dieſen allgemeinen Zeichen rechnen, d. i. aus gegebenen Größen andere unbekannte ſuchen ſoll. 111.

75. Hat eine Größe gar kein Zeichen vor ſich, ſo denkt man ſie ſich allezeit mit plus. 115.

76. Einfache Größen ſind ſolche, welche auſſer plus oder minus weiter kein Zeichen bei ſich haben. Zuſammengeſetzte Größen ſind ſolche, welche mehrere Ausdrücke in der Verbindung mit plus, oder in der Abſonderung mit minus haben. 116.

77. Die einfache Größe nennt man monomiſch; jede andere zuſammengeſetzte Größe polynomiſch. 117.

78. Jede algebraiſche Größe, die kein Wurzelzeichen bei ſich hat, heißt rationale Größe, im Gegentheil irrationale. 118.

79. Ziffern, die vor einem algebraiſchen Ausdruck vorhergehen, heiſſen Coefficienten. 119.

80. Jede

80. Jede algebraiſche Größe, vor welcher keine Ziffer vorher geht, hat 1 zum Coefficienten. 120.

81. Eine Ziffer, die oben hinter einem Buchſtaben ſteht, heißt Exponent. 121.

82. Größen, bei welchen kein Exponent ausdrücklich ſteht, haben 1 zum Exponenten. 122.

83. Wie addirt man mit einerlei Zeichen und einerlei Buchſtaben? 124.

84. Wie addirt man mit einerlei Zeichen, aber mit verſchiedenen Buchſtaben? 125.

85. Wie addirt man verſchiedene Größen mit verſchiedenen Buchſtaben? 126.

86. Wie addirt man ſolche Größen, welche aus mehreren ähnlichen Größen zuſammengeſetzt ſind? 127.

87. Diejenigen Größen in der Algebra ſind ähnlich, die einerlei Buchſtaben und die nemliche Anzahl von Buchſtaben haben. 128.

88. Sind nicht einerlei Buchſtaben gegeben, ſo ſchreibt man ſie blos mit ihren Zeichen hintereinander, die Größen mögen poſitive oder negative ſeyn. 130. 1.

89. Sind Buchſtaben und Zeichen einerlei, ſo zählt man die gleichen Buchſtaben zuſammen und ſetzt vor jede Zahl, wie viel ihrer ſind. 130. 2.

90. Sind einerlei Buchſtaben mit verſchiedenen Zeichen da, ſo zieht man die kleinere Zahl

von der größern ab, und ſetzt bei dem Reſt das Zeichen der größern. 130. 3.

91. Sind in den Subtractionsaufgaben nicht einerlei Buchſtaben vorhanden, ſo ſchreibe man diejenige, welche abgezogen werden ſollen, gerade hinter diejenigen, von welchen ſie abzuziehen ſind, mit dem Zeichen minus. 131. 1.

92. Sind einerlei Buchſtaben und Zeichen vorhanden, und es ſoll das Kleinere vom Größern abgezogen werden, ſo verfahre man wie bei der Rechnung mit Zahlen. 131. 2.

93. Soll das Größere vom Kleinern abgezogen werden, ſo ziehe man das Kleinere vom Größern ab, und ſetze ſtatt plus, minus, und ſtatt minus, plus zum Reſte. 131. 3.

94. Sind die Zeichen verſchieden, aber einerlei Buchſtaben, ſo addire man die ähnlichen Buchſtaben, und ſetze zur Summe das Zeichen desjenigen, von welchem die Subtraction geſchehen iſt. 131. 4.

95. Eine allgemeine und leichte Regel, für alle möglichen Fälle der Subtraction mit Buchſtaben iſt dieſe: Man verändere alle Zeichen der abzuziehenden Größe, in die entgegengeſetzten Zeichen, und addire nach geſchehener Veränderung. 133.

96. Wenn Größen von verſchiedener Art von einander ſollen abgezogen werden, ſo folgt, daß

nur

nur die abzuziehenden Größen mit dem entgegengeſetzten Zeichen hinzugeſetzt werden dürfen. 134.

97. Wenn Größen von einerlei Zeichen und Buchſtaben multiplicirt werden, ſo erhält das Product das Zeichen plus. 136.

98. Wenn Größen mit verſchiedenen Zeichen und Buchſtaben multiplicirt werden, ſo liefert das Product das Zeichen minus. 137.

99. Die Coefficienten multipliciren ſich, wie in der Arithmetik. 138.

100. Die Buchſtaben multiplicirt man, wenn man ſie unmittelbar an einander hängt, allemal nach alphabetiſcher Ordnung. 139.

101. Beſteht der Multiplicandus und Multiplicator aus mehreren Ausdrücken, ſo multiplicirt jeder Ausdruck des Multiplicators alle und jede Ausdrücke des Multiplicandus. 140.

102. Die Exponenten multipliciren ſich nicht, ſondern addiren und werden zuſammengezählt. 141.

103. Alle Fälle der Multiplication der Zeichen ſind in Folgendem enthalten: plus multiplicirt mit plus, gibt plus. Minus multiplicirt mit minus gibt plus. Plus multiplicirt mit minus gibt minus. Minus multiplicirt mit plus gibt minus. 142.

104. Bei der Multiplication gibt es überhaupt nur zween Fälle, entweder beſteht der Multipli-

cator nur aus Einem Buchſtaben oder Zahlzeichen, oder aus mehreren, die durch das Zeichen plus oder Minus verbunden ſind. 143.

105. Die Summe zwoer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt gibt die Differenz ihrer Quadrate. 143.

106. Was geben zween Factoren immer? 144.

107. Was kann man jedesmal dafür ſetzen, wenn in der Rechnung $a^2 - b^2$ vorkommt? 145.

108. Was läßt ſich für die Ausdrücke $ax - xx$, und für $x - xx$ jedesmal ſetzen? 146.

109. In der Diviſion werden die Buchſtaben, welche durch die Multiplication verbunden ſind, wieder getrennt, im Fall der Diviſor einerlei mit dem einen oder dem andern Factor des Dividendus iſt. 147.

110. Sind Dividendus und Diviſor ganz verſchieden, ſo wird die Diviſion entweder blos angezeigt, oder es wird der Quotient in einer unendlichen Reihe von Brüchen durch Näherung geſucht, wenn der Diviſor zuſammengeſetzt iſt. 147.

111. Was für Regeln gibt es bei dieſer Art von Diviſion? 148.

112. Wie viel Fälle überhaupt gibt es bei dieſer Art von Diviſion? 149.

113. Wie geſchieht die Diviſion mit einem Diviſor, der eine einzelne Größe iſt? 150.

114. Wie

114. Wie geſchieht die Diviſion mit einem Diviſor, der keine einzelne Größe iſt? 151.

f) Anwendung der Buchſtabenrechnung auf Brüche.

115. Wie bringt man die Brüche in der Buchſtabenrechnung unter einerlei Benennung? 154.

116. Wie addirt man Brüche mit einerlei und mit verſchiedenen Nennern? 155.

117. Wie ſubtrahirt man Brüche mit einerlei und mit verſchiedenen Nennern? 156.

118. Wie multiplicirt man Brüche? 157.

119. Wie dividirt man Brüche? 158.

g) Anwendung der Buchſtabenrechnung auf Potenzen.

120. Was verſteht man unter erſter, zweiter, dritter, vierter Potenz? 160—162.

121. Jeder einzelne Buchſtab, jeder zuſammengeſetzte Ausdruck kann die erſte Potenz ſeyn, und ſo zu höhern Potenzen erhoben werden. 163.

122. Wie ſchreibt man bei Potenzen einen Buchſtaben, der mehrmal geſchrieben werden ſoll, ohne ihn mehrmal zu ſchreiben? 164.

123. Jede Größe für ſich allein, oder in der erſten Potenz muß eigentlich, nach dieſer Art die Potenz auszudrücken, 1 zum Exponenten haben. 165.

124. Wie

124. Wie handelt man, wenn zuſammengeſetzte Größen zu Potenzen erhoben werden ſollen? 166.

125. Man kann die Potenzen addiren, ſubtrahiren, multipliciren, dividiren. 167.

126. Die Potenzen ſind entweder gleichnamig oder nicht gleichnamig. 167.

127. Bei nicht gleichnamigen Potenzen geſchehen die vier Rechnungsarten, mit den bekannten Zeichen. 167.

128. Bei gleichnamigen Potenzen geſchieht die Addition und Subtraction wie in Zahlen. 167.

129. Bei der Multiplication der gleichnamigen Potenzen werden die Exponenten addirt und die Summe iſt das Product. 168.

130. Bei der Diviſion wird der Exponent des Diviſors von dem Exponenten des Dividendus abgezogen; die Differenz iſt der Quotient. 169. 170.

131. Eine Größe, die unverändert bleibt, und nicht mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, läßt ſich durch x^1 ausdrücken. 171.

132. Eine Potenz, deren Exponent Null iſt, iſt allezeit 1. (172).

133. Wenn der Exponent des Diviſors größer iſt, als der Exponent des Dividendus, ſo wird der Exponent des Quotienten negativ. 173.

134. Eine

134. Eine Potenz mit einem negativen Exponenten iſt einem Bruch gleich, deſſen Zähler 1, und deſſen Nenner die nemliche Potenz mit dem poſitiven Exponenten iſt. 174.

135. Wie handelt man bei zuſammengeſetzten Potenzen? 175.

136. Wie handelt man, wenn der Exponent unbeſtimmt iſt? 176.

137. Potenzen laſſen ſich zu höhern Graden erheben, wenn man ihre Exponenten mit dem Exponenten des verlangten Grads multiplicirt. 177.

138. Wie iſts in dieſem Fall bei zuſammengeſetzten Größen und bei negativen Größen? 179. 180.

139. Die Wurzel aus einer Potenz läßt ſich ausdrücken, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt. 181.

140. Wie verfährt man, wenn hinter, oder vor dem Wurzelzeichen Zahlen ſind? 182. 183.

141. Wie verfährt man bei zuſammengeſetzten Wurzelgrößen und bei der Diviſion? 183.

h) Decimalbrüche.

142. Ein Decimalbruch iſt ein Bruch, deſſen Nenner eine Potenz der Zehen iſt. 184.

143. Jeder Bruch kann in Decimalbrüche verwandelt werden, wenn man dem Zähler ſo viel Nullen anhängt, auf wie viel Ziffer man die Zehen

hentheilige Brüche fortſetzen will, und hernach durch den Nenner dividirt. 185.

144. Wenn der Bruch durch die Diviſion nicht genau ſich ausdrücken läßt, ſo ſucht man ſeinem wahren Werth ſo nahe zu kommen, daß der Fehler kaum ein Millionentheilgen betrifft. 186.

145. Wie addirt, ſubtrahirt, multiplicirt und dividirt man bei Decimalbrüchen? 187.

i) Sexageſimalbrüche.

146. Wenn ein Ganzes in 60 Theile und jeder Theil wieder in 60 u. ſ. w. getheilt wird, entſteht ein Sexageſimalbruch. 188.

147. Wie addirt, ſubtrahirt, multiplicirt und dividirt man bei Sexageſimalbrüchen? 188.

k) Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln.

148. Wenn eine Zahl aus zween Theilen beſteht, ſo enthält ihr Quadrat das Quadrat des erſten Theils, ein doppeltes Product aus dem erſten Theil in den andern, und das Quadrat des andern Theils. 190.

149. Wie zieht man aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel aus? 194.

150. Wie geſchieht das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer Zahl, die kein vollkommenes Quadrat iſt? 195.

151. Wie

151. Wie macht man die Probe der Quadratrechnung? 196.

152. Wie zieht man die Quadratwurzel aus einem Bruch? 197.

153. Was heißt die Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl ausziehen? 198.

154. Wie zieht man aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel aus? 200.

155. Wie handelt man, wenn man die Cubikwurzel nicht genau finden kann? 201.

156. Wie macht man die Probe der Cubikrechnung? 202.

157. Wie findet man die Theile eines Quadrats, wenn die Wurzel aus mehr, als zween Theilen beſteht? 203.

158. Wie findet man den Würfel einer Wurzel, die drei oder mehr Theile hat? 208.

159. Der Würfel einer vieltheilichten Wurzel enthält die Würfel aller Theile, die dreifachen Producte aus dem Quadrat jeder Summe aller vorhergehenden Theile in den nächſtfolgenden, und die dreifachen Producte aus jeder Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächſtfolgenden. 208.

l) Verhältniſſe.

160. Eine Verhältniß entſteht durch die Vergleichung zwoer Zahlen oder Größen. 211.

161. Unterſucht man durch die Subtraction, wieviel eine Zahl größer, als die andere iſt, ſo betrachtet man dieſe beiden Zahlen in ihrem arithmetiſchen Verhältniß. 216.

162. Unterſucht man durch die Diviſion, wie vielmal eine Zahl in der andern enthalten iſt, oder was für ein Theil von der einen in der andern ſteckt, ſo betrachtet man ſie in ihrem geometriſchen Verhältniß. 218.

163. In jedem Verhältniß ſieht man ein Glied als das vorhergehende, und das andere, als das nachfolgende an; die Ordnung iſt willkührlich. 214.

164. Die Aehnlichkeit oder Gleichheit zwoer Verhältniſſe heißt eine Proportion. 221.

165. Die Aehnlichkeit oder Gleichheit zwoer arithmetiſchen Verhältniſſe heißt eine arithmetiſche Proportion. 225.

166. Wenn bei einer arithmetiſchen Proportion das zweite und dritte Glied einerlei ſind, ſo heißt ſie ſtetig. 223.

167. In jeder arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der beiden äußern Glieder der Summe der beiden mittlern gleich. 226.

168. In einer ſtetigen arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der äußern Glieder noch einmal ſo groß, als die Summe des mittlern Glieds, das zweimal vorkommt. 228.

169. Wie kann man in einer ſtetigen arithmetiſchen Proportion das mittlere Glied finden? 229.

170. Wie kann man zu dreien die vierte arithmetiſche Proportionalzahl finden? 230.

171. Die Aehnlichkeit oder Gleichheit zwoer geometriſchen Verhältniſſe heißt eine geometriſche Proportion. 232.

172. Gleichnamige Glieder ſind ſolche, welche in unterſchiedenen Verhältniſſen einerlei Stellen einnehmen, oder einerlei Namen führen. 235.

173. Das Product des erſten Glieds in das vierte iſt gleich dem Product des zweiten Glieds in das dritte. 236.

174. Wenn drei Zahlen in Proportion ſtehen, ſo iſt das Product aus den äuſſerſten Gliedern der Quadratzahl des mittleren Glieds gleich. 237.

175. Wenn vier Zahlen in einer Proportion ſtehen, ſo verhält ſich die erſte zu der dritten, wie die zwote zu der vierten. 238.

176. Wenn zwei Producte gleich ſind, ſo kann man aus ihnen eine Proportion machen, von welcher das eine Product, welches man will, die mittlern Glieder, das andere die äuſſern gibt. 239.

177. Wie kann man die mittlere geometriſche Proportionalzahl finden? 241.

178. Wie kann man zu zwoen geometriſchen Zahlen die dritte finden? 242.

179. Wie kann man zu drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl finden? 243.

m) Rechnung in genannten Zahlen.

180. Genannte Zahlen ſind ſolche, denen am Ende der Name ihrer Einheit beigefügt wird. 246.

181. Wie addirt, ſubtrahirt, multiplicirt und dividirt man die genannten Zahlen? 248—251.

182. Wie handelt man, wenn man einen Bruch ſchnell in genannten Zahlen ausdrücken will? 252.

n) Regel de Tri.

183. Die Regel de Tri lehrt, wie man zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometriſche Proportionalzahl finden ſoll? 253.

184. Die verkehrte Regel de Tri nennen es Einige, wenn man die Glieder erſt verſetzen muß, ehe man das Geſuchte richtig finden kann. 254.

185. Die zuſammengeſetzte Regel de Tri iſt, wo die Regel de Tri mehr als einmal angebracht, und zu fünf gegebenen Größen die ſechste gefunden wird. Sie heißt auch Regula de quinque. 255.

186. Wenn

186. Wenn man bei einer Rechnung die Regel de Tri öfter, als einmal anbringt, ſo heißt ſie Geſellſchaftsrechnung. 258.

187. Die Vermiſchungsrechnung lehrt, wie man aus der gegebenen Verhältniß der einfachen Materien finden ſoll, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer verlangten Menge der vermiſchten Materie komme. 259.

188. Die welſche Practica lehrt, wie man bei der Regel de Tri einige Vortheile anbringen ſoll, die Rechnung abzukürzen und doch das Verhältniß nicht aufzuheben. 260.

189. Wie gebraucht man die ſogenannte Reesiſche Regel? 261.

190. Wie handelt man bei der Reesiſchen Rechnung, wenn Brüche vorkommen? 263.

191. Wie verfährt man bei der Kettenregel? 264.

o) Progreſſionen.

192. Eine Reihe Zahlen, die in einer gewiſſen Vergleichung zu- oder abnehmen, nennt man eine Progreſſion.

193. Die Reihe der natürlichen Zahlzeichen iſt eine arithmetiſche Progreſſion, deren Differenz immer einerlei, nemlich 1 iſt.

194. Die Summen der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Gliedern in einer

arithmetiſchen Progreſſion ſind allemal einander gleich. 267.

195. Wie kann man die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion finden? 269.

196. Eine geometriſche Progreſſion iſt eine Menge von Zahlen oder Größen überhaupt, die in einer zuſammenhängenden geometriſchen Proportion fortgehen. 273.

197. Wie kann man aus dem erſten und zweiten Glied oder aus dem erſten Glied und dem Exponenten alle folgende Glieder finden? 276.

198. In einer geometriſchen Reihe ſind die Producte der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Gliedern gleich. 281.

p) Logarithmen.

199. Der Name Logarithme bedeutet die Zahl der Verhältniſſe. 284.

200. Wenn man unter eine geometriſche Progreſſion, die mit 0 anfängt, eine arithmetiſche ſchreibt, deren erſtes Glied = 0 iſt, ſo enthält die zwote Reihe die Logarithme der erſten Reihe. 285.

201. Die logarithmiſche Reihe muß nothwendig mit einer Null anfangen, wenn das erſte Glied der geometriſchen Progreſſion 1 iſt. 286.

202. Die

202. Die Logarithmen zeigen an, wie vielmal das erſte Glied nach 1 in den folgenden enthalten ſei. 286.

203. Man kann die Logarithmen für alle möglichen Progreſſionen in ganzen Zahlen gebrauchen. 287.

204. Der Logarithme des Products iſt die Summe der Logarithmen der Factoren, und der Logarithme des Quotienten iſt die Differenz der Logarithmen vom Dividendus und Diviſor. 288.

205. Weil eine gebrochene Zahl durch einen negativen Exponenten ausgedrückt wird, ſo kann man auch für die rückwärts fortgeſetzte Reihe in Brüchen Logarithmen finden. 289.

206. Wie verfährt man, wenn man eine Zahl zu einer Potenz erheben will? 290.

207. Man kann die Logarithmen derjenigen Zahlen, die zwiſchen die Potenzen hineinfallen, durch Näherung ſo finden, daß der Fehler nicht merklich iſt. 291.

208. Weil die Logarithmen in Zehentheiligen Brüchen gefunden werden, ſo beſteht ein jeder aus einer ganzen Zahl, oder ſtatt des Zahlzeichens aus 0, und aus Brüchen. Das ganze Zahlzeichen heißt die Charakteriſtik. 293.

q) Gleichungen.

209. Einerlei Größe auf verſchiedene Weiſe ausgedruckt heißt eine Gleichung. 294.

210. Glieder der Gleichung nennt man diejenigen Theile, die durch die vier Rechnungsarten und andere Zeichen zuſammenhängen. 294.

211. Wie verfährt man mit den vier Rechnungsarten bei Gleichungen? 295.

212. Einfache Gleichung iſt, in welcher die unbekannte Größe nur in der erſten Potenz oder Dignität ſich findet. 296.

r) Höhere Aufgaben der praktiſchen Rechenkunſt.

213. Die ganze Kunſt bei höhern Aufgaben beſteht darinnen, daß man den erſten Satz richtig ausdrücke, oder das Problem verſtehe und hernach richtig ſetze; das übrige kommt aufs Calculiren an. 298.

III. Aus der Geometrie.

a) Elementargeometrie.

214. Die Geometrie iſt eine Wiſſenſchaft der Größen, in ſo fern man auf die Lage, Ordnung und Verbindung ihrer Theile ſieht. 12. 312.

215. Die Gränze einer Sache iſt ihr Aeuſſerſtes, oder wo ſie aufhört. 313.

216. Eine ſtetige Größe iſt, deren Theile alle ſo zuſammenhängen, daß, wo einer aufhört, gleich der andere anfängt, und zwiſchen des einen Ende und des andern Anfang nichts iſt, das nicht zu dieſer Größe gehörte. 314.

217. Die

217. Die geometriſche Ausdehnung iſt ein Raum, den die ſtetige Größe nach allen Seiten zu ausfüllt. 315.

218. Die körperliche Ausdehnung oder ein geometriſcher Körper heißt eine ſolche Ausdehnung, die das, was ſich innerhalb ihrer Gränzen befindet, überall nach allen Seiten zu umgibt. 316.

219. Die Ausdehnung der Körper an ihren Gränzen heißt eine Fläche; die Ausdehnung der Fläche an ihren Gränzen eine Linie, die Gränze der Linie aber iſt ein Punkt. 317.

220. Der Punkt iſt nicht nur die Gränze der Linie, ſondern die Gränze aller Ausdehnung. 318.

221. Eine gerade Linie iſt, deren Theile nach einerlei Gegend zu liegen. Eine krumme Linie iſt, wo kein Theil mit dem andern nach einerlei Gegend zu liegt. 319. 320.

222. Eine Ebene heißt, in der man von jedem Punkte zum andern gerade Linien ziehen kann, ſo, daß alle Punkte dieſer Linie in der Fläche liegen. 321.

223. Ein ebener Winkel iſt die Neigung zwoer geraden Linien gegen einander, die in einer Ebene liegen, und nicht eine einzige gerade ausmachen. 322.

224. Gerade Linien, die ſich auf einer Ebene befinden, und niemals zuſammenſtoſſen können, wenn

wenn ſie auch auf beiden Seiten ohne Ende verlängert würden, heiſſen parallele Linien. 324.

225. Linien, die auf einer ebenen Fläche irgendwo zuſammenſtoſſen würden, wenn man ſie auf beiden Seiten verlängerte, werden in derjenigen Gegend, wo ſie ſich einander nähern, zuſammengehende — wo ſie ſich aber von einander entfernen, auseinanderfahrende Linien genannt. 324.

226. Winkel über einer geraden Linie, die einen gemeinſchaftlichen Schenkel und einen gemeinſchaftlichen Scheitel haben, nennt man Nebenwinkel. 325.

227. Wenn eine gerade Linie auf einer andern geraden Linie ſo ſteht, daß die Nebenwinkel gleich ſind, ſo wird die Linie ſenkrecht oder perpendicular genennt, und die Nebenwinkel ſind rechte Winkel. 326.

228. Alle Winkel, die nicht rechte Winkel ſind, nennt man ſchiefe Winkel. 327.

229. Diejenigen ſchiefen Winkel, die kleiner ſind als rechte Winkel, heißen ſpitzige — die größer als rechte — ſtumpfe Winkel. 328.

230. Eine Fläche, die in Linien eingeſchloſſen iſt, heißt eine Figur, und die Linien, welche die Gränzen derſelben ausmachen, werden die Seiten der Figur genannt. 329.

231. Wenn

231. Wenn die Seiten einer Figur krumme Linien ſind, ſo heißt die Figur eine krummlinigte Figur. 330.

232. Eine krummlinigte Figur, in welcher alle Punkte ihrer Gränze einerlei Abſtand von einem gewiſſen mittlern Punkt haben, heißt ein Cirkel. 331.

233. Ein Cirkel entſteht, wenn ſich eine gerade Linie auf der Ebene um einen feſten Punct bewegt, bis ſie wieder in die vorige Lage kommt. 331.

234. Der feſte Punkt im Cirkel heißt Mittelpunkt. 233.

235. Der Weg, den der Punct, der am Ende des Halbmeſſers iſt, in der Rundung herum macht, iſt des Cirkels Umfang, und heißt auch Peripherie. 233.

236. Der Raum, über welchen der Halbmeſſer weggeht, iſt des Cirkels Fläche. 233.

237. Jede Linie, welche von dem einen Ende der Peripherie zum andern durch den Mittelpunkt gezogen wird, heißt Durchmeſſer. 233.

238. Die gerade Linie im Cirkel, die ſich um den feſten Punkt bewegt, heißt Halbmeſſer, und iſt die Hälfte vom Durchmeſſer. 233.

239. Linien, die von der Peripherie eingeſchloſſen werden, ohne durch den Mittelpunkt zu gehen, heiſſen Sehnen. 233.

240. Das Stück der Cirkelfläche zwiſchen einer Sehne und einem Bogen des Cirkels wird Abſchnitt oder Segment genannt. 233.

241. Die Fläche, welche zwiſchen zween Halbmeſſern und ihrem Bogen enthalten iſt, heißt Ausſchnitt oder Sector. 233.

242. Die Linie, welche die Peripherie des Cirkels auswendig berührt, ohne ihn zu ſchneiden, wenn ſie auch verlängert würde, heißt Tangente. 233.

243. Alle Halbmeſſer und alle Durchmeſſer eines Cirkels oder gleicher Cirkel ſind einander gleich; und wenn zween Cirkel gleich große Durchmeſſer oder Halbmeſſer haben, ſo müſſen ſie einander ſelbſt gleich ſeyn. 332.

244. Ebene Figuren, die in gerade Linien als Seiten eingeſchloſſen ſind, heißen geradlinigte Figuren. 333.

245. Eine Figur, die drei Seiten hat, heißt Dreieck. 334.

246. Ein Dreieck, deſſen drei Seiten einander gleich ſind, heißt gleichſeitig. 335.

247. Ein Dreieck, deſſen zwo Seiten nur einander gleich ſind, heißt gleichſchenklicht. 336.

248. Ein Dreieck, das keine gleiche Seiten hat, heißt ungleichſeitig. 337.

249. Ein Dreieck, in welchem einer von den Winkeln ein rechter Winkel iſt, heißt rechtwinklicht. 338.

250. Ein Dreieck, in welchem einer von den Winkeln ein ſtumpfer Winkel iſt, wird ſtumpfwinklicht genannt. 339.

251. Ein Dreieck, worinnen alle drei Winkel ſpitzig ſind, heißt ſpitzwinklicht. 340.

252. Eine Figur, die vier Seiten hat, heißt ein Viereck. 342.

253. Eine Figur, die vier gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat, heißt ein Quadrat. 343.

254. Eine Figur, die lauter rechte Winkel hat, wo aber nur die zwo entgegengeſetzten Seiten einander gleich ſind, heißt längliches Viereck oder Rechteck. 344.

255. Eine Figur, die vier gleiche Seiten und lauter ſchiefe Winkel hat, heißt Raute. 346.

256. Eine Figur, die zwar lauter ſchiefe Winkel, aber nur die beiden einander entgegengeſetzten Seiten gleich hat, heißt länglichte Raute. 347.

257. Figuren, welche keine der bisher angezeigten Eigenſchaften der Vierecke haben, heiſſen ungleichſeitige Vierecke oder Trapezien. 348.

258. Figuren,

258. Figuren, welche mehr als vier Seiten haben, neunt man Polygone oder Vielecke. 350.

259. Vielecke werden von der Anzahl ihrer Seiten oder ihrer Winkel benannt. 351.

260. Ein ordentliches Vieleck hat lauter gleiche Winkel. Ein unordentliches Vieleck hat weder lauter gleiche Seiten, noch lauter gleiche Winkel. 353. 354.

261. Wenn in zwoen Figuren einerlei Winkel in einerlei Ordnung nacheinander folgen, und die Seiten, welche einerlei Winkel in beiden Figuren einſchlieſſen, ſich ebenfalls in einerlei Ordnung in der einen Figur eben ſo gegen einander unter ſich verhalten, wie ſie ſich in der andern Figur gegen einander unter ſich verhalten, ſo heiſſen die Figuren ähnlich. 355.

262. Wenn ſich die Scheitel aller Winkel einer Figur in der Peripherie des Cirkels befinden, ſo ſagt man „die Figur ſei in einen Cirkel beſchrieben„ und „der Cirkel ſei um die Figur beſchrieben.„ 356.

263. Wenn alle Seiten einer Figur den Umkreis eines Cirkels berühren, ſo ſagt man „daß der Cirkel in die Figur, und die Figur um den Cirkel beſchrieben ſei.„ 357.

264. Durch jede zween gegebenen Punkte läßt ſich eine gerade Linie ziehen und nach Gefallen verlängern. 358.

265. Durch

265. Durch zween Punkte überhaupt iſt die Lage, und durch die zween Endpunkte wird die Länge einer geraden Linie gegeben. 359.

266. Aus jedem Mittelpunkt und mit jedem Halbmeſſer läßt ſich ein Cirkel beſchreiben. 360.

267. Durch zween Punkte kann nur eine gerade Linie gehen; alſo ſchlieſſen zwo gerade Linien keinen Raum ein. 361.

268. Wenn zwo gerade Linien zuſammenſtoſſen, ohne eine einige gerade Linie auszumachen, ſo haben ſie nichts als einen Punkt mit einander gemein. Wenn nun beide Linien verlängert werden, ſo durchſchneiden ſie einander in dieſem Punkt, ſo, daß von jeder Linie etwas auf beiden entgegengeſetzten Seiten des Punktes iſt. 362.

269. Wenn man Größen dergeſtalt aufeinander legt, daß alle Gränzen der einen Größe und was dazwiſchen enthalten iſt, auf die Gränzen der andern Größe, und was dazwiſchen enthalten iſt, fallen, ſo nennt man ſie gleich und ähnlich, und von ſolchen Größen ſagt man, daß ſie einander decken oder congruent ſeien. 363.

270. Gerade Linien und Winkel, die gleich ſind, decken einander. 364.

271. Winkel heiſſen gleich, wenn die Neigung ihrer Schenkel einerlei iſt, obſchon dieſe eine verſchiedene Länge haben. 365.

272. Zween Winkel decken einander, wenn nur ihre Scheitel und Schenkel auf einander fallen. 366.

273. Von Größen, die einander decken, kann die eine völlig in den Raum der andern geſetzt werden. 367.

274. Alle rechte Winkel ſind gleich, denn ſie decken einander. 368.

275. Ein Durchmeſſer theilt eine Cirkelfläche in zwei ähnliche und gleiche Stücke. 369.

276. Der Umfang eines Kreiſes um den Mittelpunkt iſt eine zuſammenhängende krumme Linie. 370.

277. Eine unbegränzte, gerade Linie theilt die unbegränzte Ebene, in der ſie gezogen iſt, in zween Theile, die an ihren entgegengeſetzten Seiten liegen. 371.

278. Wie kann über einer gegebenen Linie ein gleichſeitiges Dreieck beſchrieben werden? 373.

279. Wenn zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel in einem Dreieck ſo groß, als in dem andern ſind, ſo iſt alles in beiden Dreiecken gleich, und beide Dreiecke ſind einander gleich und ähnlich. 374.

280. In einem gleichſchenklichten Dreieck ſind die Winkel an der Grundlinie gleich. 376.

281. Wenn in zweien Dreiecken eine Seite mit den anliegenden Winkeln in einem, wie in dem andern iſt, ſo iſt alles übrige gleich, und beide Dreiecke ſind einander gleich und ähnlich. 378.

282. Wenn in einem Dreieck die beiden Winkel an der Grundlinie gleich ſind, ſo ſind auch die beiden Seiten gleich. 383.

283. In einem gleichſeitigen Dreieck ſind alle drei Winkel gleich, und wenn in einem Dreieck alle Winkel gleich ſind, ſo iſt es gleichſeitig. 385.

284. Wenn in zweien Dreiecken alle Seiten gleich ſind, ſo iſt alles in beiden Dreiecken gleich, und die Dreiecke ſind einander gleich und ähnlich. 386.

285. Wie halbirt man einen gegebenen Winkel? 387.

286. Wie halbirt man eine gegebene gerade Linie? 388.

287. Wie richtet man aus einem gegebenen Punkt auf einer gegebenen Linie ein Perpendikel auf? 388.

288. Wie kann man aus einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Linie ein Perpendikel fällen? 389.

289. Zween Nebenwinkel auf einer geraden Linie betragen zuſammen ſo viel, als zween rechte Winkel. 390.

290. Von

290. Von zween Nebenwinkeln, deren keiner ein rechter iſt, iſt allezeit einer ſpitzig, der andere ſtumpf. 392.

291. Wenn eine gerade Linie von einer andern durchſchnitten wird, ſo ſind die entgegengeſetzten Winkel, welche man Verticalwinkel nennt, einander gleich. 393.

292. **Wenn in einem Dreieck eine Seite verlängert wird,** ſo iſt der äuſſere Winkel größer, als der innere, welcher der verlängerten Seite gegenüberſteht. 394.

293. In einem Dreieck, das einen rechten Winkel hat, ſind die beiden andern ſpitzig, und eben ſo iſt es, wenn es einen ſtumpfen Winkel hat. 397.

294. Auf eine gegebene Linie gibt es von einem Punkt auſſer ihr und durch einen Punkt in ihr nur ein einziges Perpendikel. 398.

295. Wenn in zwei Dreiecken zween Winkel mit der eingeſchloſſenen Seite einander gleich ſind, ſo ſind die ganzen Dreiecke gleich und ähnlich, und decken einander. 406.

296. Wie macht man an einen gegebenen Punkt einer gegebenen Linie einen Winkel, der einem gegebenen Winkel gleich iſt? 407.

297. **Wenn zwo Linien durch eine dritte ſo durchſchnitten werden,** daß die beiden innern, entgegengeſetzten Winkel ſo viel als zween rechte

Winkel betragen, die Wechſelswinkel einander gleich ſind und der äuſſere Winkel dem innern entgegengeſetzten gleich iſt, ſo ſind die Linien parallel. 408.

298. Wenn zwo gerade Linien von einer dritten ſo geſchnitten werden, daß die innern entgegengeſetzten Winkel kleiner ſind, als zween rechte Winkel, ſo ſtoſſen ſie verlängert nach der Seite, wo dieſe Winkel liegen, zuſammen. 411.

299. Eine Diagonallinie iſt eine gerade Linie, die innerhalb einer geradlinigten Figur von der Spitze des einen in die Spitze des andern Winkels gezogen wird. 415.

300. Parallelen zwiſchen Parallelen ſind gleich. 416.

301. Ein Parallelogramm wird durch die Diagonallinie in zwei gleiche Dreiecke getheilt. Seine gegenüberſtehenden Winkel ſind gleich, und die an einer Seite liegenden Winkel, ſind zween rechten Winkeln gleich. 419.

302. In jedem Dreieck iſt die Summe aller drei Winkel zween rechten Winkeln gleich. 422.

303. Zween ſchiefe Winkel in einem rechtwinklichten Dreieck machen zuſammen auch einen rechten Winkel. 425.

304. Ein Parallelogramm, in welchem ein rechter Winkel iſt, hat lauter rechte Winkel. 426.

305. In einem gleichſeitigen Dreieck beträgt jeder Winkel ſo viel, als zwei Drittheile eines rechten Winkels. 426.

306. Wenn in einem gleichſchenklichten Dreieck ein Winkel gegeben iſt, ſo ſind ſie alle gegeben. 427.

307. Wie kann man in einer jeden Figur die Summe aller Winkel finden? 429.

308. Parallelogramme zwiſchen einerlei Parallelen und über einer Grundlinie ſind gleichen Innhalts. 430.

309. Zwei Parallelogramme, deren Grundlinien und Höhen gleich ſind, ſind auch gleichen Innhalts. 432.

310. Dreiecke ſind gleichen Innhalts, wenn ihre Spitzen in einer Parallele mit der gemeinſchaftlichen Grundlinie liegen; und umgekehrt. 434.

311. Jedes Parallelogramm iſt noch einmal ſo groß, als jedes Dreieck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. 435.

312. Wie macht man ein Parallelogramm, das einem gegebenen Dreieck gleich iſt? 436.

313. In einem rechtwinklichten Dreieck heiſſen die beiden Seiten, die den rechten Winkel einſchlieſſen, Catheti, und die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber ſteht, die Hypotenuſe. 437.

314. In einem rechtwinklichten Dreieck iſt das Quadrat der Hypotenuſe ſo groß, wie die Quadrate der beiden Cathetorum zuſammengenommen. 438.

315. Wenn in einem rechtwinklichten Dreieck die Hypotenuſe und ein Cathetus ſo groß iſt, als in einem andern rechtwinklichten Dreieck, ſo müſſen auch die übrigen Stücke in beiden Dreiecken, und die Dreiecke ſelbſt einander gleich ſeyn. 441.

316. Wie macht man ein Quadrat, das ſo groß iſt, als zwei oder mehrere andere zuſammengenommen? 442.

317. Wenn eine Linie einen Kreis in zween Punkten ſchneidet, ſo iſt jeder Punkt von ihr, der zwiſchen die zween Punkte fällt, näher bei dem Mittelpunkt, als der Halbmeſſer beträgt, und jeder Punkt auſſer den zween Punkten iſt weiter davon. 443.

318. Eine gerade Linie ſchneidet einen Kreis entweder in zween Punkten, oder ſie berührt ihn in einem, oder ſie trifft gar nicht an ſeinem Umfang an, und alle ihre Punkte ſind auſſer ihm. 444.

319. Ein Perpendikel, der aus eines Cirkels Mittelpunkt auf eine Sehne gefällt worden, halbirt ſie. 445.

320. Eine Linie, die aus dem Mittelpunkt gezogen, die Sehne halbirt, ſteht auf ihr ſenkrecht. 446.

321. Eine Linie, die durch die Mitte einer Sehne ſenkrecht gezogen wird, geht durch den Mittelpunkt. 447.

322. Wie kann man durch drei gegebene Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Cirkel beſchreiben? 448.

323. Wenn die Sehnen vom Mittelpunkt gleich entfernt ſind, ſo ſind ſie gleich. Wenn ſie gleich ſind, ſo ſind ſie gleich entfernt. Die kleinere Sehne iſt entfernter; die entferntere iſt kleiner. 440—452.

324. Ein Perpendikel, der auf den Halbmeſſer durch ſein Ende gefällt worden, hat alle ſeine übrigen Punkte auſſerhalb dem Kreiſe. Jede andere Linie aber ſchneidet den Kreis in zween Punkten. 454.

325. Ein Perpendikel durch das Ende eines Halbmeſſers iſt eine Tangente. 455.

326. Wie kann man aus einem gegebenen Punkt eine Tangente an den Kreis ziehen? 459.

327. Kreiſe, die aus einem Mittelpunkt mit verſchiedenen Halbmeſſern beſchrieben ſind, heiſſen concentriſch, und haben keinen Punkt mit einander gemein. 461.

328. Kreiſe, die einander ſchneiden, haben nicht einerlei Mittelpunkt, aber eine gemeinſchaftliche Sehne durch die Durchſchnittspunkte, und wenn

wenn man durch das Mittel dieſer Sehne einen Perpendikel auf ſie ſetzt, ſo geht ſolcher durch beider Kreiſe Mittelpunkte. 462.

329. Kreiſe, die einander berühren, haben an einer gemeinſchaftlichen Tangente einen gemeinſchaftlichen Berührungspunkt. Kreiſe, die dergleichen haben, berühren einander, weil ihre Mittelpunkte in dem Perpendikel auf die Tangente durch den Berührungspunkt liegen. 466.

330. Zween Kreiſe, die durch einen Punkt gehen, aber daſelbſt nicht einerlei Tangente haben, ſchneiden einander auſſer dieſem Punkt noch anderswo, denn eines jeden Mittelpunkt liegt in einem Perpendikel auf ſeine Tangente durch den gemeinſchaftlichen Punkt, und dieſe Perpendikel müſſen verſchieden ſeyn; alſo können nicht beide Mittelpunkte mit dem gemeinſchaftlichen Punkt in einer geraden Linie liegen. 466.

331. Der **Winkel am Mittelpunkt** eines Kreiſes iſt derjenige, deſſen Spitze an den Mittelpunkt, und deſſen beide Schenkel an die Peripherie ſtoſſen. 470.

332. Der **Winkel an der Peripherie** eines Kreiſes iſt derjenige, deſſen Spitze ſowohl, als die beiden Schenkel an die Peripherie deſſelben Cirkels ſtoſſen. 471.

333. Der **Winkel** an dem **Mittelpunkt** iſt noch einmal ſo groß, als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einerlei Bogen ſteht. 472.

334. Wenn in einem Kreis die Winkel am Mittelpunkt einander gleich ſind, ſo ſind die Bogen zwiſchen ihren Schenkeln gleich und umgekehrt. 474. 475.

335. Gleiche Sehnen eines Cirkels haben gleiche Bogen, und gleiche Bogen haben gleiche Sehnen. 476.

336. Theilt man einen Cirkel in vier gleiche Bogen, ſo heißt jeder derſelben ein Quadrant. 480.

337. Welches iſt die gewöhnliche Art **Winkel** zu meſſen? 483.

338. Das **Maas** eines **Winkels** am Umkreis iſt die Hälfte des Bogens, auf dem er ſteht, und wenn zween Winkel auf Bogen ſtehen, die zuſammen den Umkreis ausmachen, ſo machen ihre Maaſe zuſammen den halben Umkreis. 484.

339. Wie beſchreibt man in einem gegebenen Cirkel ein ordentliches Sechseck? 490.

340. Wie beſchreibt man auf einer gegebenen Linie ein Sechseck? 491.

341. Wie beſchreibt man über einer gegebenen Linie ein **ordentliches Vieleck**? 492.

342. Alle

342. Alle Höhen der Dreiecke, in welchen das Vieleck aus dem Mittelpunkt getheilt wird, ſind gleich. 493.

343. Wie kann man bei einem Kreis, der in lauter gleiche Bogen getheilt iſt, die Winkel erfahren, welche die Sehnen mit einander machen? 485.

344. Die Halbmeſſer theilen das regulaire Polygon, das in den Kreis beſchrieben iſt, in lauter gleiche Dreiecke. 486.

345. Dreiecke von gleicher Höhe verhalten ſich wie ihre Grundlinien. 494.

346. Wenn in einem Dreieck eine durch das Dreieck gehende Linie mit der Grundlinie parallel iſt, ſo verhält ſich die eine Hälfte der einen Seite des Dreiecks zur andern Hälfte der nemlichen Seite, wie die eine Hälfte der andern Seite des Dreiecks zur andern Hälfte der nemlichen Seite, und wenn dieſe letztgenannten Verhältniſſe richtig ſind, ſo iſt jene durch das Dreieck gehende Linie mit der Grundlinie parallel. 497.

347. Wenn in zweien Dreiecken die Winkel einander gleich ſind, ſo verhalten ſich jede zwo Seiten des einen Dreiecks, wie die beiden Seiten des andern, die den gleichen Winkeln gegenüber ſtehen, und ſind alſo die beiden Dreiecke einander ähnlich. 499.

348. Wenn in zweien Dreiecken, einem großen und einem kleinen, die eine Seite des großen ſich zur andern Seite des großen Dreiecks verhält, wie die eine Seite des kleinen zur andern Seite des kleinen Dreiecks, und wenn die eine Seite des großen ſich zur Grundlinie deſſelben verhält, wie die eine Seite des kleinen Dreiecks zur Grundlinie, ſo ſind die Winkel in der Ordnung gleich, wie ſie den proportionirten Seiten gegenüber ſtehen, und alſo ſind die Dreiecke einander ähnlich. 501.

349. Wenn in zweien Dreiecken, einem großen und einem kleinen B gleich abc iſt, und AB ſich verhält zu BC wie ab zu bc, ſo ſind die Dreiecke ähnlich. 503.

350. Wie kann man eine gegebene Linie in Theile theilen, die eben die Verhältniſſe unter einander haben, wie die gegebenen Theile einer andern Linie? 504.

351. Wie kann man zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie finden? oder zu zwoen die dritte? 506. 507.

352. Wie kann man zwiſchen zwo Linien eine mittlere geometriſche Proportionalzahl finden? 508.

353. Jedes rechtwinklichte Dreieck wird durch den Perpendikel von dem rechten Winkel auf die Hypo-

Hypotenuſe in zwei Dreiecke getheilt, die unter ſich und dem Ganzen ähnlich ſind. 509.

354. Wie wird ein Rechteck ausgemeſſen? 510.

555. Wenn ſich die beiden Seiten eines Rechtecks mit einer gegebenen Linie ausmeſſen laſſen, ſo ſteckt das Quadrat von der gegebenen Linie in dem Rechteck ſo vielmal, ſo viel Einheiten das Product enthält, wenn man die beiden Seiten als Zahlen anſieht, deren Einheit die Linie iſt, die ſie beide mißt. 510.

356. Wie erfährt man den Innhalt eines Quadrats? 512.

357. Wie findet man den Flächeninnhalt eines ſchiefen Parallelogramms? 514.

358. Wenn zwei Parallelogramme einerlei Höhe haben, ſo verhalten ſie ſich gegen einander, wie ihre verſchiedenen Grundlinien. 515.

359. Wenn zwei Parallelogramme einerlei Grundlinie haben, ſo verhalten ſie ſich gegen einander wie ihre verſchiedenen Höhen. 516.

360. Da man jedes Dreieck als die Hälfte eines Parallelogramms betrachten kann, ſo müſſen nicht nur Dreiecke von gleichen Höhen ſich wie ihre Grundlinien, und umgekehrt, verhalten, weil die Hälften eben die Verhältniß haben, wie die Ganzen. 517.

361. Der Innhalt eines Dreiecks kommt heraus, wann man das Product aus ſeiner Höhe in die Grundlinie halbirt. 518.

362. Wie berechnet man ein Vieleck? 519. 520.

363. Wie berechnet man ein Trapezium? 521.

364. Aehnliche Dreiecke verhalten ſich wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten. 524.

365. Aehnliche Figuren verhalten ſich wie die Quadrate ähnlicher Seiten. 525.

366. Linien, die in zwoen ähnlichen Figuren auf ähnliche Art beſtimmt werden, verhalten ſich, wie die ähnlich liegenden Seiten. 526.

367. Aehnliche Figuren verhalten ſich auch wie die Quadrate ſolcher Linien, die in ihnen auf ähnliche Art beſtimmt oder gezogen werden, wenn es gleich nicht Seiten ſind. 526.

368. Aehnliche Dreiecke verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Höhen. 526.

369. Wenn von einem Dreieck der Innhalt und die Grundlinie gegeben wird, ſo kann man die Höhe finden. 527.

370. Wie läßt ſich eine Figur in eine Menge gleicher Theile theilen? 528. 529.

371. Unter Quadratur des Cirkels verſteht man die Erfindung eines Quadrats entweder in Linien oder in Zahlen, welches ganz genau ſo groß iſt, als der Innhalt des Cirkels. 533.

372. Läßt ſich die Quadratur des Cirkels finden? 533.

373. Wie läßt ſich die Peripherie und der Innhalt des Cirkels finden? 534.

374. Wie verhält ſich das Quadrat des Durchmeſſers zum Innhalt des Cirkels? 535.

375. Wie findet man den Durchmeſſer? 536.

376. Wie berechnet man den Ausſchnitt eines Cirkels? 537.

377. Was kann man aus der gegebenen Sehne eines Cirkelbogens und aus deſſen Höhe finden? 538.

378. Wie kann man den Abſchnitt, der zwiſchen einem Cirkelbogen und einer Sehne iſt, berechnen? 539.

379. Eine Linie ſteht auf einer Ebene ſenkrecht, wenn ſie mit allen Linien rechte Winkel macht, welche in dieſer Ebene durch den Ort, wo ſie in die Ebene eintrifft, gezogen werden. 540.

380. Die Neigung einer Linie gegen eine Ebene, oder ihr Winkel mit der Ebene iſt der Winkel, den ſie mit einer andern Linie macht, die in der Ebene durch den Ort, wo ſie in die Ebene eintrifft, nach dem Ort gezogen wird, wo ein Perpendikel von einem willkührlichen Punkte einer Linie auf die Ebene herabgelaſſen, in dieſe Ebene eintrifft. 541.

381. Die

381. Die Neigung der Ebenen gegen einander iſt der Winkel zwiſchen zwo Linien, die durch einen Punkt des Durchſchnitts beider Flächen, jede in einer der beiden Ebenen, auf dieſen Durchſchnitt ſenkrecht gezogen werden. Alſo ſteht eine Ebene auf der andern ſenkrecht, wenn dieſer Winkel ein rechter iſt. 542.

382. **Gleichlaufende Ebenen** nennt man, die nach allen Seiten erweitert nirgends zuſammenſtoſſen. 543.

383. Gleichlaufender Ebenen Durchſchnitte mit einer dritten Ebene ſind gleichlaufend. 543.

384. Ein **körperlicher Winkel** iſt zwiſchen mehr als zwo Linien, deren nie mehr als zwo in einer Ebene liegen, an dem Punkte, wo ſie alle zuſammenſtoſſen, enthalten. 544.

385. Ein **Prisma** iſt der körperliche Raum, der zwiſchen zwo parallelen, gleichen und ähnlichen Ebenen und durch eben ſo viel Parallelogramme, als jede der Grundflächen Seiten hat, eingeſchloſſen. 545.

386. Wie werden die **Prismata** eingetheilt? 545.

387. Wenn ein viereckiges Prisma Grundflächen hat, welche Parallelogramme ſind, ſo entſteht ein **Parallelepipedum**. 545.

388. Ein Körper, der eine geradlinigte Figur zur Grundfläche hat, ringsherum aber von ſo viel Dreiecken, als Seiten an der Grundfläche ſind, eingeſchloſſen wird, welche oben mit ihren Spitzen zuſammenſtoſſen, wird Pyramide genannt. 546.

389. Wie pflegt man die Pyramiden einzutheilen?

390. Iſt die Grundfläche ein Kreis, ſo heißt ſie ein Kegel, deſſen Axe eine Linie von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche iſt. 547.

391. Der körperliche Raum einer Kugel wird begränzt, indem ſich ein halber Kreis um ſeinen Halbmeſſer als eine Achſe dreht, bis er wieder in ſeine erſte Lage kommt. 548.

392. Ordentliche Körper heiſſen ſolche, die in lauter ordentliche gleiche Vielecke von einer Art, die gleiche Ecken machen, eingeſchloſſen ſind. Es gibt ihrer nur fünf, nemlich: Würfel, Tetraedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, Icoſaedrum. 550—555.

393. Eine gerade Linie, von welcher zween Punkte in einer Ebene ſind, befindet ſich ganz in dieſer Ebene. 557.

394. Wenn eine gerade Linie auf zwo Linien ſenkrecht ſteht, ſo ſteht ſie auf jeder Linie, die in einer Ebene durch einen Punkt gezogen wird, ſenkrecht. 558.

395. Wenn

395. Wenn zwo Linien auf einer Ebene ſenkrecht ſtehen, ſo ſind ſie gleichlaufend. 560.

396. Wenn von zwoen gleichlaufenden Linien die eine auf einer Ebene ſenkrecht ſteht, ſo ſteht die andere auf dieſer Ebene auch ſenkrecht. 561.

397. Zwo Parallelen ſind mit einer dritten unter ſich parallel, wenn gleich nicht alle drei in einer Ebene ſind. 562.

398. Wie wird von einem Punkt in der Höhe auf eine Ebene ein Perpendikel herabgelaſſen? 564.

399. Wie richtet man aus einem gegebenen Punkt auf eine Ebene ein Perpendikel auf? 565.

400. Wie kann man durch einen gegebenen Punkt eine Ebene führen, die mit einer gegebenen Ebene parallel liegt? 569.

401. Eine Linie kann nicht in einem Punkt zugleich auf zwo Ebenen ſenkrecht ſeyn, und durch einen Punkt geht mit einer Ebene nur eine Ebene parallel; daher ſteht eine Linie, die auf einer von zwo parallelen Ebenen ſenkrecht ſteht, auf der andern ſenkrecht. 570.

402. Wenn ein Perpendikel auf einer Ebene ſenkrecht ſteht, ſo ſteht auf dieſer Ebene jede Ebene durch den Perpendikel ſenkrecht. 571.

403. Parallele Ebenen machen mit einer dritten Ebene gleiche Neigungswinkel. 576.

404. Wenn

404. Wenn zwo Ebenen eine dritte in parallelen Linien ſchneiden, und mit ihr, nach einer Seite zu, gleiche Neigungswinkel machen, ſo ſind ſie parallel. 577.

405. Parallellinien haben gegen einerlei Ebene einerlei Neigung. 578.

406. Wenn zwo Ebenen auf einer dritten ſenkrecht ſtehen, ſo ſteht der Durchſchnitt jener beiden Ebenen auf der dritten Ebene auch ſenkrecht. 579.

407. Wenn eine Kugel durch eine Ebene geſchnitten wird, ſo entſteht allemal ein Kreis. 580.

408. Jeder Schnitt, der nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht, gibt einen kleinern Kreis, als derjenige iſt, welcher die Kugel beſchreibt. Jeder Schnitt durch den Mittelpunkt aber gibt einerlei größten Kreis. 581.

409. Eine gerade Linie ſchneidet die Kugelfläche in nicht mehr als zween Punkten. 582.

410. Jeder Kreis auf der Kugel iſt der Durchſchnitt einer gewiſſen Ebene mit der Kugel. Ein Perpendikel aus der Kugel Mittelpunkt auf die Ebene dieſes Kreiſes geht durch ſeinen Mittelpunkt. Ein Perpendikel aus dem Mittelpunkt des Kreiſes auf die Ebene deſſelben geht durch der Kugel Mittelpunkt. Eine Linie aus dem Mittelpunkt der Kugel durch den Mittelpunkt des Kreiſes ſteht auf ſeiner Ebene ſenkrecht. 583.

411. Größte

411. Größte Kreiſe ſchneiden einander in einem gemeinſchaftlichen Durchmeſſer durch den Mittelpunkt der Kugel, und halbiren alſo einander. Es ſchneiden aber alle größten Kreiſe einander, weil der Kugel Mittelpunkt in Aller Ebenen iſt. 584.

412. Kreiſe, die einander halbiren, ſind größte Kreiſe, denn ſie können einander nicht halbiren, ohne einerlei Durchmeſſer und folglich ohne einerlei Mittelpunkt zu haben. 585.

413. Wenn ein Punkt der Kugelfläche von allen Punkten eines Kreiſes gleichweit entfernt ſeyn ſoll, ſo muß ein Perpendikel von ihm auf des Kreiſes Ebene gelaſſen durch deſſelben Mittelpunkt gehen. 587.

414. Was nennt man Pole des Kreiſes? 587.

415. Wenn eine Ebene durch das Ende des Halbmeſſers auf ihn ſenkrecht geſetzt wird, ſo liegen alle ihre übrigen Punkte auſſerhalb der Kugel, oder ſie berührt die Kugelfläche. Dieſe Ebene iſt für die Kugel, was die Tangente für den Kreis iſt, und ein Perpendikel auf die Kugelfläche durch einen gegebenen Punkt iſt ein Perpendikel auf die Ebene, welche die Kugel in dieſem Punkt berührt, und mit der Kugelfläche ein Element gemein hat. 588.

416. Eine gerade Linie durch die beiden Pole eines Kreiſes ſteht auf ſeiner Ebene ſenkrecht, und

geht

geht durch ſeinen Mittelpunkt und durch der Kugel Mittelpunkt. 589.

417. Ein Kreis durch die Pole eines Kreiſes gezogen ſteht auf ihm ſenkrecht, und iſt ein größter Kreis, und ſchneidet die Ebene deſſelben ſo, daß der Durchſchnitt beider Ebenen durch den Mittelpunkt dieſes Kreiſes geht, und alſo dieſen Kreis halbirt. 590.

418. Wenn ein größter Kreis auf einen andern größten oder kleinern ſenkrecht ſteht, ſo geht er durch dieſes andern Pole durch und halbirt ihn. 591.

419. Wenn zween größte Kreiſe aufeinander ſenkrecht ſtehen, ſo geht jeder durch des andern Pole. 592.

420. **Kreiſe deren Ebenen parallel liegen, d. i. Parallelkreiſe, haben einerlei Pole.** 594.

421. Wenn durch die Pole zweener Parallelkreiſe größte Kreiſe geführt werden, ſo ſind die Bogen der Parallelkreiſe zwiſchen ihnen einander ähnlich. 595.

422. Wie wird der Pol eines größten Kreiſes gefunden? 600.

423. Zween größte Kreiſe machen mit einem dritten nicht gleiche Winkel nach einer Seite. 603.

424. Wie kann man die Möglichkeit eines Prisma zwiſchen zweien Ebenen zeigen? 604.

425. Wenn zwo Seiten der Grundflächen parallel, ſo ſind die ihnen zugehörigen Seitenflächen parallel. 608.

426. Wenn die Grundflächen Parallelogramme ſind, ſo ſind die Seitenflächen vier Parallelogramme, deren jede zwei gegenüberſtehende parallel ſind. 609.

427. Ein Parallelepipedum iſt alſo in ſechs Parallelogramme eingeſchloſſen, da die gegenüberſtehenden paarweiſe parallel und gleich ſind. 609.

428. Ein ſenkrechtes Parallelepipedum hat vier Rechtecke zu Seitenflächen. Sind ſeine Grundflächen ebenfalls Rechtecke, ſo iſt es in ſechs Rechtecke eingeſchloſſen. 610.

429. Hat ein ſenkrechtes Parallelepipedum Quadrate zu Grundflächen, und iſt die ſenkrechte Weite der Grundflächen der Seite des Quadrats gleich, ſo ſind die Seitenflächen Quadrate von einerlei Größe mit der Grundfläche. Es heißt ein **Würfel**, deſſen Seite die Seite eines ſolchen Quadrats heißt, deren ſechs ringsherum den Würfel einſchlieſſen. 611.

430. Ein Körper, den zween gleiche und parallele Kreiſe als Grundflächen und eine krumme Seitenfläche einſchließt, heißt Cylinder. 612.

431. Wie wird ein Cylinder eingetheilt? 612.

432. Wenn

432. Wenn die Axen zweener Cylinder oder zweener Kegel einerlei Neigung gegen ihre Grundfläche und einerlei Verhältniſſe gegen den Durchmeſſer ihrer Grundflächen haben, ſo heiſſen ſie ähnlich. 612.

433. Alle Prismata und mithin auch alle Parallelepipeda und Cylinder, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, ſind einander gleich. 621.

434. Wie mißt man ein ſenkrechtes Parallelepipedum aus? 623.

435. Wie erfährt man den Innhalt eines Würfels? 625.

436. Wie werden die übrigen Parallelepipeda ausgemeſſen, die keine Rechtecke zu Grundflächen haben? 627.

437. Wie wird ein Prisma ausgemeſſen? 629.

438. Wie findet man den körperlichen Innhalt eines Cylinders? 630.

439. Wie wird der Innhalt einer dreieckigen Pyramide gefunden?

440. Eine dreieckige Pyramide iſt der dritte Theil von einem dreieckigen Prisma, das eben die Grundfläche und Höhe hat. 631.

341. Wenn eine Pyramide durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchſchnitten wird, ſo entſteht eine Figur, die der Grundfläche ähnlich iſt. 632.

442. Der körperliche Innhalt der vieleckigen Pyramiden iſt der dritte Theil des Products aus der Grundfläche in die Höhe. 633.

443. Wie findet man den körperlichen Innhalt eines Kegels? 635.

444. Wie findet man den Innhalt eines abgekürzten Kegels? 636.

445. Der Kegel, welcher einerlei Grundfläche und Höhe mit einem Cylinder hat, iſt der dritte Theil von einem ſolchen Cylinder. 637.

446. Alle prismatiſchen Körper, alle Cylinder, Pyramiden und Kegel verhalten ſich wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich ſind, und wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich ſind. 638.

447. Die Cylinder verhalten ſich wie die Quadrate der Durchmeſſer ihrer Grundflächen. Eben diß gilt auch von den Kegeln. 639.

448. Eine Halbkugel iſt zwei Drittel von einem Cylinder, deſſen Durchmeſſer dem Durchmeſſer der Halbkugel, und deſſen Höhe ihrem Halbmeſſer gleich iſt. 640.

449. Wie findet man den körperlichen Innhalt einer Kugel? 642. 649.

450. Wie kann man die Oberfläche der Kugel berechnen? 645. 647.

451. Wie

451. Wie findet man die Peripherie der Kugel? 647.

452. Wie findet man den Durchmeſſer der Kugel? 650.

453. Die Kugeln verhalten ſich gegen einander, wie die Würfel, oder wie die Cubikzahlen ihrer Durchmeſſer. 651.

454. Was heißt man Viſiren? und wie ſtellt man es an? 653—656.

b) Praktiſche Geometrie.

455. Mit welchem Maas mißt man gerade Linien? 658.

456. Ein Maasſtab, durch welchen ſich die Längenmaaſe im Kleinen vorſtellen laſſen, heißt ein verjüngter Maasſtab. 661.

457. Wie verzeichnet man den verjüngten Maasſtab für das zehentheiliche Maas? 662.

458. Wie mißt man Weiten und Höhen, die ſich nicht unmittelbar meſſen laſſen? 663.

459. Auf der Lehre von gleichen und ähnlichen Dreiecken beruht die ganze Feldmeßkunſt. 663.

460. Wie pflegt man ſich die Punkte auf dem Felde vorzuſtellen? 664.

461. Was braucht man zur unmittelbaren Meſſung der Linien auf dem Felde? 665.

462. Wie trägt man auf dem Felde einen Winkel auf Punkte einer gegebenen Linie? 666.

463. Wie mißt man eine Weite, wenn man zu beiden Endpunkten auch nur von einem dritten Stand kommen kann? 667. 684.

464. Wie läßt ſich eine Weite meſſen, wenn man nur zu einem Endpunkt, nicht aber zum andern kommen kann? 668. 685.

465. Wie läßt ſich eine Weite meſſen, wenn man weder zu einem noch zum andern Endpunkt kommen kann? 669. 686.

466. Was braucht man zu dem Feldmeſſen ohne Inſtrumente? 670.

467. Was braucht man zu dem Feldmeſſen mit Inſtrumenten? 670.

468. Was iſt ein Transporteur? 671.

469. Was nennt man Aſtrolabium? 672.

470. Wie mißt man einen Winkel auf dem Papier? 673.

471. Wie mißt man einen Winkel auf dem Feld? 674.

472. Was verſteht man unter einem Meßtiſchlein? 675.

473. Wie mißt man eine Höhe, wenn ſich an das untere Ende der Höhe kommen oder nicht kommen läßt? 682. 683.

474. Wenn zwo Figuren einander ähnlich ſind, und zwar die Seiten in der Ordnung, wie einerlei Buchſtaben an ihnen ſtehen, einander proportionirt

tionirt ſind, ſo ziehe man durch zween Punkte der größern Figur Linien, die einander in einem dritten Punkt ſchneiden, und ziehe durch zween Punkte der kleinern Figur Linien, die einander in dem dritten Punkt ſchneiden. Die beiden Punkte der größern und der kleinern Figur, heiſſen ähnlichliegende, und wenn man aus ihnen an alle Winkel der Figuren gerade Linien zieht, ſo entſtehen lauter ähnliche Dreiecke. 691.

475. Wie kann man auf einer gegebenen Linie eine Figur zeichnen, die einer gegebenen Figur ähnlich iſt? 693.

476. Wie kann man auf dem Papier eine Figur entwerfen, welche der auf dem Felde ähnlich ſei? oder, mit andern Worten, wie kann man eine Figur in Grund legen? 695.

477. Wie mißt man, wenn man in die Figur auf dem Felde kommen, oder nicht in ſie kommen, aber um ſie herumgehen, oder wenn man aus zween Ständen alle Winkel einer Figur überſehen kann? 696. 697.

478. Die Markſcheidekunſt iſt eine Wiſſenſchaft, welche lehrt, wie man die unter der Erde gemachten Gänge ausmeſſen und zeichnen ſoll. 700.

III. Aus der Trigonometrie.

479. Die ebene Trigonometrie lehrt aus drei gegebenen Stücken eines ebenen Dreiecks, unter wel-

chen wenigſtens eine Seite ſeyn muß, die übrigen drei Stücke durch Rechnung finden. 705.

480. Ein Perpendikel, der von dem Endpunkt eines Halbmeſſers auf einen andern Halbmeſſer herabgefällt wird, heißt der Sinus des Bogens, der zwiſchen den beiden Halbmeſſern enthalten iſt. 706.

481. Wenn ein Sinus in gerader Linie verlängert wird, bis er den Cirkel wieder ſchneidet, ſo entſteht eine Sehne, von welcher der Sinus die Hälfte iſt. 708.

482. Zween Nebenwinkel haben einerlei Sinus. 709.

483. Der größte Sinus iſt dem Radius gleich. 711.

484. Der größte Sinus, d. i. der Radius, heißt in der Trigonometrie der Sinus totus. 712.

485. Weil kein Sinus größer wird, als der Sinus totus, ſo kann man die Sinus als eigentliche Brüche vom Sinus totus oder Radius anſehen. 713.

486. **Poſitiv** heißt bei einer Figur, was gegen die eine, und **negativ**, was gegen die andere Seite zu liegt; oder umgekehrt. 714.

487. Ein einiger Sinus iſt der Sinus von unendlich vielen Bögen; es läßt ſich daher kein beſtimmtes Verhältniß zwiſchen dem Bogen und ſeinem Sinus geben. 715.

488. Wenn ein Bogen unter 90 Graden gegeben iſt, ſo heißt der Bogen, der, zu ihm addirt,

dirt, 90 Grade vollends gibt, das Complementum zu 90 Graden, und der Sinus dieſes Bogens iſt der Sinus Complementi oder Coſinus. 716.

489. Aus dem gegebenen Radius und Sinus eines Bogens läßt ſich der Coſinus finden. 717.

490. Wenn der Coſinus nebſt dem Radius gegeben iſt, ſo iſt der Sinus auch gegeben. 719.

491. Die Coſinus nehmen ab, wenn die Sinus wachſen; und umgekehrt. 720.

492. Ein jeder Coſinus gehört, wie der Sinus, unendlich vielen Bogen zu. 723.

493. Eine gerade Linie, welche den Cirkel in dem Punkt, wo der Bogen anfängt, unter einem rechten Winkel mit dem Radius berührt, und von dem andern verlängerten Radius geſchnitten und folglich beſtimmt wird, heißt die Tangente des Bogens, und der ſie ſchneidende verlängerte Radius heißt die Secante. 724.

494. Aus dem Radius und Sinus iſt der Coſinus, und aus beiden die Tangente und Secante gegeben. 725.

495. Eine jede Tangente und Secante correſpondirt unendlich vielen Bögen. 731.

496. Die Cotangente iſt die Tangente des Complementi zu 90 Graden, welche durch die Secante dieſes Bogens, die deßwegen Coſecante heißt, geſchnitten und beſtimmt wird. 732.

497. Durch den Sinus und Radius wird die Cotangente und Coſecante beſtimmt. 733.

498. Die Cotangenten verhalten ſich umgekehrt wie die Tangenten. 735.

499. Der Abſchnitt des Radius durch den Sinus heißt der Sinus verſus. 737.

500. Das Quadrat des Radius iſt das Product von zween unmöglichen Factoren, deren einer der Coſinus plus dem Product vom Sinus in die Quadratwurzel aus Minus eins, der andere der Coſinus minus dem Product vom Sinus in die Quadratwurzel aus minus eins iſt. 739.

501. In einem jeden geradelinigten Dreieck verhalten ſich die Seiten, wie die Sinus der ihnen opponirten Winkel, und umgekehrt. 742.

502. Alle trigonometriſchen Linien verhalten ſich bei ähnlichen Bogen wie die Radii. 743.

503. In einem jeden geradlinigten Dreieck kann von einer angenommenen Spitze eine gerade Linie unter beliebigem Winkel auf die Grundlinie herabgezogen werden, alsdann verhalten ſich die Abſchnitte der Grundlinie durch die correſpondirende Seiten dividirt, wie die Sinus der opponirten neu entſtandenen Winkel. 744.

504. Wenn in einem gleichſchenklichten Dreieck der Winkel am Scheitel in zween gleiche Theile getheilt und von dem Theilungspunkt eine gerade Linie auf die Grundlinie gezogen wird, was für ein Reſultat kommt heraus? 745.

505. Die Grundlinie in dem gleichſchenklichten Dreieck iſt gleich dem Product einer Seite in

den

den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Coſinus deſſelben halben Winkels dividirt. 746.

506. Das Quadrat vom Sinus des halben Winkels iſt dem halben Product aus dem Sinus totus in die Differenz des Radius und Coſinus gleich. Oder: das Quadrat vom Sinus des halben Winkels iſt dem halben Product aus dem Radius in den Querſinus gleich. 747.

507. Wenn die Sinus zweier Bogen gegeben ſind, ſo kann man den Sinus ihres Unterſchieds finden. 750.

508. Aus den Sinuſſen zweier Bogen kann man auch den Sinus der Summe dieſer Bogen finden. 751.

509. Der Coſinus von der Summe zweener Bogen iſt gleich dem Product der beiden Coſinuum, weniger dem Product der beiden Sinuum der einzelnen Bögen. 752.

510. In einem jeden ungleichſeitigen Dreieck läßt ſich aus zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel die dritte Seite durch Rechnung beſtimmen. 756.

511. Aus drei gegebenen Seiten werden die Winkel beſtimmt. 757.

512. Aus einer Seite und zween Winkeln, oder aus zwo Seiten und einem Winkel, der aber nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, laſſen ſich die übrigen Stücke leicht beſtimmen. 758.

513. In einem rechtwinklichten Dreieck kann man aus den zwo Seiten nebſt dem eingeſchloſſenen rechten Winkel die übrigen Winkel und Seiten finden. 760.

514. Aus drei Seiten eines ungleichſeitigen Dreiecks laſſen ſich die drei Winkel finden. 761.

515. Die Seite eines regulairen Vielecks läßt ſich aus dem Winkel am Mittelpunkt durch Rechnung beſtimmen. 762.

516. Das Product des Sinus totus in die Seite des Polygons, dividirt durch den doppelten Sinus des halben Centriwinkels iſt der Radius des Polygons. 762.

517. Eines jeden regulairen Vielecks Fläche läßt ſich trigonometriſch berechnen. 763.

518. Die Flächen zweier Vielecke, davon das zweite noch ſo viel Seiten als das erſte hat, verhalten ſich wie der Coſinus vom Centriwinkel des Vielecks von mehreren Seiten zum Radius. 764.

519. Wie benützt man die logarithmiſchen Tafeln? 765.

IV. Fragmente aus der höhern Mathematik.

520. Auf wie vielerlei Weiſe kann ein Kegel von einer ebenen Fläche durchſchnitten werden? 774—779.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Teutſches

Teutſches
Regiſter
über die reine Mathematik, nach Paragraphen geordnet.

A.

Abendgang 703.

Addition 29. mit ganzen Zahlen 41. mit gebrochenen Zahlen 77. mit genannten Zahlen 248. Zeichen 37. Probe 43.

Aehnlich 36.

Aehnlichkeit 36. zwoer Verhältniſſe 221. zwoer Figuren 355. Zeichen 37.

Arithmetik 24–311.

Aſtrolabium 672.

Aufgaben der höhern Rechenkunſt 299–311.

Ausdehnung 315. geometriſche 315. der Körper 316. 317.

Axe 612. eines Cylinders 612. eines Kegels 547. einer Kugel 548. 549.

B.

Baukunſt 18. bürgerliche 18. Kriegsbaukunſt 18.

Binomiſch. (S. Zweitheilig.) 117.

Biquadrat 59.

Bogen 473—485. ſeine Sinus 706—715.

Bruch, mathematiſcher 64. aufgehobener 74. falſcher 67. gleicher 68. zehentheiliger 184. ſechzigtheiliger 188. wahrer 67.

Brüche, von gleicher Benennung 73. von verſchiedener Benennung 73. unter einerlei Benennung gebrachte 73. unveränderte 72. woran ganze Zahlen hängen 78. 79. 86-88. addiren 77. ſubtrahiren 77. multi-

multiplicieren 82. dividiren 87.
Buchſtabenrechnung 111—183. Addition 124—127. Subtraction 131 — 134. Multiplication 135—146. Diviſion 147—152. bei Brüchen 153—158. bei Potenzen 159—183.

C.

Cathetus 437. 441.
Chronologie 17.
Cirkel 330—332. ſein Abſchnitt 332. des Abſchnitts Innhalt 539. ſein Ausſchnitt 332. des Ausſchnitts Innhalt 537.
Cirkel, comentriſcher 461. Durchmeſſer 332. Halbmeſſer 332. Mittelpunkt 332. Peripherie 332.
Cirkel, ſein Innhalt 534. 535. ſeinen Mittelpunkt finden 538. ſeine Peripherie finden 534. ſeinen Durchmeſſer finden 536.
Cirkel, ein in die Figur beſchriebener 357.
Cirkel, ein um die Figur beſchriebener 356.
Cirkel, die einem gewiſſen Dreieck gleich ſind 491. 492. groſe und kleine 482. die einander ſchneiden 462. einen durch drei Punkte beſchreiben, die nicht in einer geraden Linie liegen 448.
Cirkel, Quadratur deſſelben 532. 533. Verhältniß ſeines Durchmeſſers zur Peripherie 534.
Cirkelfläche 332.
Coefficient 119. 120.
Congruent 37. 363. 367.
Congruenz, ihr Zeichen 37. 367.
Conſtruction, geometriſche und mechaniſche 372.
Coſecante 733.
Coſinus 716.
Cubikruthe 619.
Cubikſchuh 619.
Cubiktafel 62.
Cubikwurzel 189—210.
Cubikzoll 619.
Cubus, oder Cubikzahl 57. eines Bruchs 85.
Cubus, ein geometriſcher Körper, Würfel 551. deſſen Innhalt 625.
Cylinder, ſenkrechter 612. ſchiefer 612.

Cylinder, von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe 621. Innhalt 630. Grundfläche 630. Verhältniß 638.

D.

Decimalbruch. S. Bruch, ſeine Rechnungsarten 184-187.
Decimaltheilung 662.
Decken, einander 364—368.
Diagonallinie 415.
Differenz 32.
Dinge, von einer Art 25. 26. von verſchiedener Art 25. 26.
Dioptern 675.
Discongruenz, ihr Zeichen 37.
Dividendus 33.
Diviſion, mit ganzen Zahlen, 48—55. mit gebrochenen Zahlen 87—89. mit genannten Zahlen 251. unter ſich 48—51. über ſich 52—54. Zeichen 37. Probe 54.
Diviſor 33.
Dodecaedrum 554.
Dohnlege 702.
Dreieck, ebenes 705. gleichſeitiges 336. gleichſchenklichtes 337. rechtwinklichtes 339. ſphäriſches 12. ſpitzwinklichtes 341. ſtumpfwinklichtes 340. ungleichſeitiges 338.
Dreiecke, die einander decken 378. 379. die einander gleich ſind 374. 378. 383. 441. 493. 494. die einander ähnlich ſind 498. 500—503. die einander gleich und ähnlich ſind 374. 378. 383.
Dreiecke, von gleichen Höhen 494. von gleichen Grundlinien 517. von gleichem Innhalt 440. den Innhalt finden 518. die Höhe finden 526. wo eine Linie mit der andern gleichlaufend iſt 498. ähnliche, oder nur gleiche, oder ähnliche und gleiche Dreiecke nachzeichnen 677.
Dreiecke, ihre trigonometriſche Berechnung 742—749.
Duodecimaltheilung 662.
Durchmeſſer, eines Cirkels, theilt eine Cirkelfläche 369. ſein Quadrat 535.
Durchſchlag 702.

E.

Ebene 321. ihre Lage 559—618.
Ebenen, parallele 543.
Ecke 544.
Einheit 27.
Ellipſe 779.
Exponent, einer Potenz 59. eines Verhältnißes 219. eines Buchſtabens 121.

F.

Factor 30.
Factum 30.
Faß, ſeine Ausmeſſung 653.
Feldmeſſen ohne Inſtrumente 663—670. mit Inſtrumenten 670—675.
Figur 329. in einen Cirkel beſchriebene 356. um einen Cirkel beſchriebene 357. ebene 334. geradlinichte 334. krummlinichte 331. eine krummlinichte Figur geradlinicht zu machen. 531. eine Figur in Grund legen 695.
Figuren, alle geradlinichte laſſen ſich in Dreiecke theilen 681.
Figuren, eine einige in eine Menge gleicher Theile theilen 528. ähnliche 355. gleiche und ähnliche 363.
Fläche, ebene 321. Innhalt 510. 514. Maas 510.
Flächenruthe 510.
Fläche, in der Markſcheidekunſt 702.
Fundgrube 702.
Fuß, rheinländiſcher 660. Pariſer 659. Londner 660.

G.

Gang, fallender 702. flacher 702. ſtehender 702. ſchwebender 702. ſteigender 702.
Ganzes, ein, iſt mit ſeinen Theilen einerlei 11.
Geographie, mathematiſche 17.
Geometrie, elementariſche 312—656. praktiſche 657—704.
Geſellſchaftsrechnung. S. Rechnung.
Geſchützkunſt 18.
Gleich 36.
Gleich und ähnlich 38.
Gleichung 294—297.
Glied, vorhergehendes 214. nachfolgendes 214. der Verhältniß 214.
Glieder, ähnlichliegende, oder gleichnamige 236. einer Pro-

Proportion 222. äuſſere 222. mittlere 222.
Gnomonik 17.
Gradbogen 702.
Grad 428.
Gränze 313.
Größe 4—11. ausgedehnte 314. die eine andere deckt 367. ſtetige 314.
Größen, monomiſche, polynomiſche 115. rationale, irrationale 118. entgegengeſetzte nebſt den vier Rechnungsarten 12. 91—110.
Größer, ſein Zeichen 37.
Grube 702.
Grubencompaß 702.
Grubengebäude 702.
Grubenzug 702.
Grundfläche bei den Körpern 545—547. 614. 616. 617. 625—628. 629—638.
Grundlinie, bei den Flächen 382. 385. 436. 438. 439. 441. 442. 498. 499. 513. 518. 522. 527. 528.

H.

Halbkugel 640.
Halbmeſſer. S. Cirkel.
Hangcompaß 702.
Hexaedrum 551.
Höhe bei Figuren 432. bei geometriſchen Körpern 614. 616.
Hyperbel 778.
Hypotenuſe 438—441.

J.

Icoſaedrum 555.

K.

Kanne 620. 652.
Kegel. S. Axe, abgekürzter 636. gerader 547. ſchiefer 547. von einerlei Grundfläche und Höhe 637. 638. ein nach einer ebenen Fläche parallel durchſchnittener 634. 776. ein durch die Spitze durchſchnittener 775. ein mit einer ſeiner Seiten parallel durchſchnittener 777. ſchief durchſchnittener 778. 779. Innhalt eines Kegels 635.
Kegelſchnitt 776—782.
Kette 666.
Kleiner, ſein Zeichen 37.
Körper, elaſtiſche 15. flüſſige 15. himmliſche 14. geometriſcher 316. ordentliche 550—555. prismatiſche 545.

Kreis, S. Cirkel, größter 581.
Kreiſe, concentriſche 461.
Kriegsbaukunſt 18.
Kugel 548. ihr Durchmeſſer 648. 650. Halbmeſſer 580. Mittelpunkt 580. 647. Oberfläche 645. 647. Innhalt 642. 648.
Kugelfläche 548.
Kugelſchnitte 584.

L.

Lachter 702.
Längenmaas 626.
Lehn 702.
Lineal 372. 670.
Linie 317. 318. Berührungslinie 332. Diagonallinie 415. gerade 319. krumme 320. ſenkrechte 326. eine gerade Linie meſſen 658. eine gerade Linie halbiren 387. eine Linie in Theile theilen 505. Neigung gegen eine Ebene 541.
Linien, auseinanderfahrende 324. parallele 323. zuſammengehende 324. zwo von einer dritten geſchnittene 411.
Linie, der zehnte Theil eines Zolls 658.
Lochſteine 703.
Logarithme 12. 284—293.

M.

Maas 6. körperliches 619. zehentheiliges 666. zwölftheiliges 662.
Maasſtab, verjüngter 662.
Magiſter Mätheſeos 438. 439.
Mahlerkunſt, das mathematiſche und phyſiſche bei derſelben 22.
Markſcheidekunſt 700.
Mathematik, drei Hauptſätze in derſelben, 36. reine 9. 12. 23. angewandte 9. 13—16. 23.
Meile 4.
Meſſen 6.
Meſſung, die, 6. 7. mittelbare 667—679. unmittelbare 664. 666.
Meßtiſchlein 675.
Minute 428.
Mittelpunkt. S. Cirkel und Kugel.
Morgengang 703.
Multipliciren 30. 31.
Multiplication mit ganzen Zahlen 44—47. mit gebrochenen Zahlen 82—86.
mit

mit genannten Zahlen 250. Probe 54. Zeichen 36.
Muſik 19.

N.

Nebenwinkel 325. 390. 391. 392.
Nenner 65.
Numeriren 38.

O.

Octaedrum 553.
Orthungen 703.
Orthpfahle 703.

P.

Parabel 777.
Parallelogramm 349. rechtwinkliches 425. 426. ſchiefwinkliches, ſein Flächeninnhalt 514.
Parallelogramm, ein, das einem gegebenen Dreieck gleich iſt 436.
Parallelogramme, von gleichen Höhen und Grundlinien 432. von gleichen Höhen und verſchiedenen Grundlinien und umgekehrt 515.
Parallelepipedum 545. ſenkrechtes, deſſen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate ſind 611. ein ſenkrechtes, deſſen Grundfläche ein Rechteck iſt, ausmeſſen 610. 623. 627. deſſen Grundfläche ein ſchiefwinkliches Parallelogramm iſt 609. 618.
Parallelepipeda von gleichen Grundflächen und Höhen 621. 622.
Parallelkreiſe 594.
Peripherie. S. Cirkel.
Perpendikel 326. einen aufrichten 387. 388. einen fällen 389.
Perpendicular 326.
Perſpectiv 22.
Polygon 350 — 354. ordentliches 353. unordentliches 354. Innhalt 520. Abtheilung 519. Verdopplung eines regulairen Polygons, das in einen Cirkel eingeſchrieben iſt. 529. 533.
Polynomiſch 203.
Potenz 12. 56 — 63.
Practica, welſche 260.
Prisma 545. eins ausmeſſen 628. dreieckiges 545. viereckiges 545. vieleckiges 629. ſenkrechtes 545. ſchiefes 545.

Prismata, von gleichen Grundflächen und Höh'en 621.
Product 30.
Progreſſion 265. arithmetiſche 267—272. geometriſche 273. zunehmende 275. abnehmende 275.
Proportion 221—224. abgeſonderte 223. arithmetiſche 225—232. geometriſche 232—245. arithmetiſch-ſtetige 228—230. geometriſch-ſtetige 235. durch Verwechslung verändern 240. 241.
Proportionallinien, zu dreien die vierte finden 506. zu zwoen die dritte finden 507. die mittlere finden 508.
Proportionalzahlen, zu dreien die vierte arithmetiſche finden 230. zu zwoen die dritte geometriſche finden 243. zu dreien die vierte geometriſche finden 244. die mittlere geometriſche finden 242.
Punkt 317. 318.
Pyramide 546. dreieckige 631. viereckige 546. vieleckige 547. Höhe 546. Innhalt 631. von gleicher Grundfläche und Höhe 631. Verhältniß zu einer andern 631. eine parallel mit der Grundfläche durchſchnittene 632.

Q.

Quadrant 480. 481.
Quadrat (in der Geometrie) 343. der Cathetorum 438. der Hypotenuſe 438. des Durchmeſſers 535. eins ſo groß machen, als zwei oder mehrere andere 442.
Quadrat, oder Quadratzahl 56. eines Bruchs 84.
Quadratruthe 513.
Quadratſchuh 513.
Quadratzoll 513.
Quadrattafel 62.
Quadratwurzel 12. 189-197.
Quadratur des Cirkels 533. 534.
Quadrinomiſch. S. Wurzel.
Quadriren 510.
Quotient 33.

R.

Raum 17.
Raum, der Körper 652.
Raute 346. längliche 347.
Rech-

Rechnung, Buchſtabenr. 12. 111—183. logarithmiſche 12. 284—293. trigonometriſche 742—749.
Rechnung, Geſellſchaftsr. 259. Vermiſchungsr. 259.
Rechnungsarten in ganzen Zahlen 41—55. in Brüchen 64—89. in genannten Zahlen 246—252.
Rechteck 345. eins ausmeſſen 510. 511.
Regel, Kettenr. 264. Reeſiſche 261. de Tri 253. ordentliche Regel de Tri 253. verkehrte Regel de Tri 253. zuſammengeſetzte oder Regula de Quinque 255.
Reſolviren 702.

S.

Salmiac 259.
Salpeter 259.
Schacht 702.
Schall 19.
Scheitel 322.
Scheitelwinkel 393.
Schenkel, eines Winkels 322.
Schießpulver 259.
Schiff, deſſen Regierung 20.
Schiffkunſt 20.
Schnur 666.
Schußwaſſer, Thedens 259.
Scrupel, ein geometr. Maas 658.
Sechseck 490. 491.
Secante 724.
Sector 332.
Secunde 428.
Segment 332.
Sehne 332. 450—458.
Seigerteufe 702.
Sexageſimalbruch 188.
Siebeneck 351.
Sinus, Erfindung derſelben 750. totus 712. Complementi 716. Berechnung 765—771.
Sohle 702.
Spiegel 16.
Spitze. S. Scheitel.
Staat, ſein Wachsthum an Bürgern 21.
Stab 670.
Stange 665.
Statik 15.
Stativ 675.
Stollen 702.
Subtrahiren 32.
Subtraction 32. von ganzen Zahlen 42. 43. von gebrochenen Zahlen 77. von genannten Zahlen 249. Probe 43. Zeichen 37.

Summe 29. 41.

T.

Tafeln, logarithmiſche 771.
Tagzug 702.
Tangente 332. 724.
Tetraedrum 552.
Transporteur 671.
Trapezium 348. eins ausrechnen 521.
Triangel. S. Dreieck.
Trigonometrie 705—771.
Trinomiſch. S. Wurzel.

U.

Ueberſchuß. S. Differenz.
Unähnlich 36.
Unähnlichkeit 37.
Ungleich 37.
Ungleichheit 37.
Unterſchied. S. Differenz.

V.

Verhältniß 211—220. arithmetiſche 216. 217. geometriſche 218—220. Glieder derſelben 222.
Vermehrung 4.
Verminderung 4.
Vermeſſen 702.
Vermiſchungsrechnung. S. Rechnung.
Vieleck. S. Polygon.
Viereck 343.
Viſiren 653.
Viſirſtab 654. 655.

W.

Waſſerwage 702.
Wehr 702.
Weineſſig 259.
Weingeiſt 259.
Weite, eine zu meſſen 667—669.
Winkel, äuſſere 394. 395. 408. ebene 322. entgegengeſetzte 395. gleiche 365. innere 408. 411. Nebenwinkel 326. rechte 326. 328. 396. 397. 402. 428. 429. ſchiefe 327. ſpitzige 328. 397. 404. ſtumpfe 328. 396. 403. 404. Verticale, oder Scheitelwinkel 393. wechſelsweiſe 408. am Mittelpunkt 470. 473. 474. an der Peripherie 471. im halben Kreis 473. der Winkel Summe finden 429. halbiren 386. unbekannte eines Dreiecks berechnen 12. die einander decken 366. Schenkel eines Winkels 322 Spitze oder Scheitel eines Winkels 322. Winkel meſſen 483. 484. auf dem Felde meſſen

meſſen 674. auf dem Papier meſſen 673. körperlicher 544.
Winkelmeſſer 672. 674. 688. 689. 690.
Wurzel, binomiſche, trinomiſche, quadrinomiſche, polynomiſche, 203. Zeichen 37.
Würfel. S. Cubus.

Z.

Zahl, die abzuziehende 32. 43. ganze 24—55. gebrochene 64—90. genannte 246—263. die zu vermindernde 43.
Zahlen, ſummirende 30. rationale, irrationale 207.
Zähler 65—68.
Zeichen, mathematiſche 37.
Zeichenkunſt 22.
Zeit 17.
Zirkel 674.
Zoll 658.
Zucker 259.
Zug 702.
Zugeben 702.
Zulegen 702.
Zuſammengeſetztes, ein, 11.
Zweitheilig 203.

Lateiniſch=teutſches Wörterbuch über die reine Mathematik.

A.

Abacus Pythagoricus, Rechentafel.

Additio, Addition.

Aequalitas, Gleichheit.

Aequatio, Gleichung.

Aggregatio, Summe.

Altitudo, Höhe.

Angulus, Winkel, acutus, ſpitziger, ad centrum, Winkel am Mittelpunkt, ad peripheriam, Winkel an der Peripherie, ad ſemicirculum, Winkel im halben Kreis, aequalis, gleicher, contiguus, Nebenwinkel, externus, äuſſerer, internus, innerer, obliquus, ſchiefer, obtuſus, ſtumpfer, oppoſitus, entgegengeſetzter, planus, ebener, rectus, rechter, ſolidus, körperlicher, verticalis, Scheitelwinkel.

Architectura, Baukunſt, civilis, bürgerliche, militaris, Kriegsbaukunſt,

Arcus, Bogen.

Area, Innhalt, Größe des Raums, der von einer Figur beſchloſſen wird.

Arithmetica, Rechenkunſt.

Artilleria, Geſchützkunſt.

Aſtrolabium, Winkelmeſſer.

Aſtronomia, Aſtronomie.

Axis, Axe.

B.

Baculus. Stab.

Baſis, Grundfläche, Grundlinie.

Biquadratum, Biquadrat.

C.

Calculus, Rechnung, literalis, Buchſtabenr. logarithmicus, logarithmiſche.

Capacitas, Raum bei Körpern.

Cantharus, Kanne.

Catena, Kette.

Catheti, zwo Seiten, die in einem rechtwinklichten Dreieck den rechten Winkel einſchlieſſen.

Catoptrica, Catoptrik.

Cenſus, Quadratzahl.

Centrum, Mittelpunkt.

Chorda, Sehne.

Chronologia, Zeitrechnung.

Circinus, Zirkel.

Circulus, Kreis, concentricus, concentriſcher, figurae inſcriptus, in die Figur beſchriebener, figurae circumſcriptus, um die Figur beſchriebener.

Compoſitum, ein Zuſammengeſetztes.

Congruentia, Congruenz, Uebereinſtimmung, das einander Decken.

Conſtructio, Zuſammenſetzung.

Conus, Kegel, rectus, gerader, ſcalenus, ſchiefer.

Corpus, Körper, elaſticum, elaſtiſcher, fluidum, flüſſiger, geometricum, geometriſcher, irregulare, unordentlicher, prismaticum, prismatiſcher, pyramidale, pyramidenförmiger, regulare, ordentlicher.

Crus, Schenkel.

Cubus, Würfel.

Cubare, Cubiren, den Innhalt eines Körpers ſuchen.

Curva, krumme Linie.

Cylindrus, Cylinder, rectus, ſenkrechter, ſcalenus, ſchiefer.

D.

Differentia, Unterſchied.

Denominatio, Benennung.

Denominator, Nenner.

Diameter, Durchmeſſer.

Digitus, Zoll.

Dimenſio, Meſſung, immediata, unmittelbare, mediata, mittelbare.

Dioptrae, Diopter.

Discongruentia, Discongruenz; Nichtübereinſtimmung.

Diſſimilitudo, Ungleichheit.

Diſtantia, Weite.

Dividendus, die Zahl, welche getheilt werden ſoll.

Diviſio, die Theilung.

Diviſor, die Zahl, welche theilt.

Dodecaedrum, ein regulairer Körper, der in zwölf regulaire Fünfecke eingeſchloſſen iſt.

Dolium, ein Faß.

E.

Ellipſis, Ellipſe.

Exponens, Exponent, potentiae, einer Potenz, rationis, eines Verhältnißes.

Extenſio. Ausdehnung, corporum, Ausdehnung der Körper, geometrica, geometriſche.

F.

Factor, eine Zahl, welche mit einer andern multiplicirt wird.

Factum, eine Zahl, welche herauskommt, wenn zwo mit einander multiplicirt werden.

Figura, Figur, circulo inſcripta, in einen Cirkel beſchriebene, circulo circumſcripta, um einen Cirkel beſchriebene.

Figura, Figur, curvilinea, krummlinichte, plana, ebene, quadrilatera, Quadrat, rectilinea, geradlinichte.

Figurae in charta delineatae ſimilem deſignare, eine Figur in Grund legen.

Fractio, Bruch, ad minores terminos reducta, aufgehobener, aequalis, gleicher, decimalis, zehentheiliger, ſexageſimalis, ſechzigtheiliger, ſpuria, falſcher, vera, wahrer.

Fracturae, Brüche, ad eandem denominationem redactae, unter einerlei Benennung gebrachte, ejusdem denominationis, von gleicher Benennung, diverſae denominationis, von verſchiedener Benennung.

Funis, Schnur.

G.

Geographia, Erdbeſchreibung.

Geometria, Geometrie.

Gnomonica, Gnomonik.

Gradus, Grad.

H.

Hemiſphaerium, Halbkugel.
Heptagonum, Siebeneck.
Hexagonum, Sechseck.
Hiſtiodromia, Schiffkunſt.
Hydraulica, Hydraulik.
Hydroſtatica, Hydroſtatik.
Hyperbola, Hyperbel.
Hypotenuſa, die Seite, welche in einem rechtwinklichten Dreieck dem rechten Winkel gegenüber ſteht.

I.

Icoſaedrum, ein regulairer Körper, der in zwanzig gleichſeitige Triangel eingeſchloſſen iſt.
Inaequalitas Ungleichheit.
Incongruentia, Discongruenz.
Inſtrumentum transportatorium, Transporteur.
Invenire ſoliditatem vaſorum cylindricorum, Viſiren.

L.

Limes, Gränze.
Linea, Linie, curva, krumme, diagonalis, diagonale, perpendicularis, ſenkrechte, recta, gerade, tangens circulum, Berührungslinie.
Lineae, Linien, convergentes, zuſammengehende, divergentes, auseinander fahrende, parallelae, gleichlaufende.
Literalis calculus, Buchſtabenrechnung.
Logarithmus, Logarithme.
Logarithmicus calculus, logarithmiſche Rechnung.
Longimetria, die Wiſſenſchaft von Ausmeſſung der Längen.

M.

Magnitudo, Länge.
Matheſis, Mathematik.
Menſula geometrica, Meßtiſchlein.
Menſura, Maas, decimalis, zehentheiliges, duodecimalis, zwölftheiliges, ſolidi, körperliches.
Milliare, Meile.
Minutum, Minute.
Multiplicatio, Multiplication.
Muſica, Muſik.

N.

Numerator, Zähler.
Numerus, Zahl, fractus, gebrochene, integer, ganze, minuen-

minuendus, zu vermindernde, numeratus, genannte, ſubtrahendus, abzuziehende.

Numerus quadratus, Quadratzahl.

Numeri ſummandi, ſummirende Zahlen.

O.

Oblongum, Rechteck.

Octaedrum, eine regulaire Figur, die in acht gleichſeitige Triangel eingeſchloſſen iſt.

P.

Parabola, Parabel.

Parallelepipedum, ein viereckiges Prisma, welche Parallelogramme zu Grundflächen hat, rectum, ſenkrechtes.

Parallelogrammum, ein Viereck, deſſen gegenüberſtehende Seiten parallel ſind, obliquangulum, ſchiefwinklichtes, rectangulum, rechtwinklichtes.

Peripheria, der Umfang.

Perpendiculum, Perpendikel.

Perſpectiva, Perſpectiv.

Pertica, Meßruthe, quadrata, Quadratruthe.

Pes, Schuh, quadratus, Quadratſchuh.

Pes menſulae geometricae, Stativ.

Planimetria, Wiſſenſchaft von Ausmeſſung der Flächen.

Planum, Ebene.

Polygonum, Vieleck, regulare, regulaires, irregulare, irregulaires.

Poſitio, Lage.

Potentia, Potenz.

Practica italica, welſche Practik.

Prisma, Prisma, multangulare, vieleckiges, obliquum, ſchiefes, quadrangulare, viereckiges, rectum, ſenkrechtes, triangulare, dreieckiges.

Productum. S. Factum.

Progreſſio, Progreſſion, arithmetica, arithmetiſche, creſcens, zunehmende, decreſcens, abnehmende, geometrica, geometriſche.

Proportio, Proportion, arithmetica, arithmetiſche, continua, ſtetige, diſcreta, abgeſonderte, geometrica, geometriſche.

Pyra-

Pyramis, Pyramide, multangularis, vieleckige, triangularis, dreieckige.

Q.

Quadrans, Quadrant.

Quadrare, Quadriren, den Innhalt einer Fläche finden.

Quadratum, Quadrat.

Quadratum circuli, Quadratur des Cirkels.

Quadratus numerus, Quadratzahl.

Quantitas, Größe, continua, ſtetige Größe, extenſa, ausgedehnte, infinite parva, unendlich kleine.

Quantitas quantitati congruens, eine Größe, die die andere deckt.

R.

Radius, Halbmeſſer.

Radix, Wurzel, binomia, zweitheilige, trinomia, dreitheilige, quadrinomia, viertheilige, polynomia, vieltheilige.

Ratio, Verhältniß, arithmetica, arithmetiſches, geometrica, geometriſches.

Rectangulum, Rechteck.

Regula, Lineal.

Regula, Regel, Reeſiana, Reeſiſche, Trium, de Tri, Trium directa, ordentliche, Trium compoſita, zuſammengeſetzte, Trium inverſa, verkehrte.

Rhomboides, länglicheRaute.

Rhombus, Raute.

S.

Scala geometrica, verjüngter Maasſtab.

Scrupulum, Serupel.

Sector, Ausſchnitt.

Secundum, Secunde.

Segmentum, Abſchnitt.

Semidiameter, Halbmeſſer.

Similitudo, Aehnlichkeit.

Solidum, Körper.

Sorites arithmeticus, Kettenregel.

Spatium, Raum.

Species, Art.

Sphaera, Kugel.

Stereometria, Wiſſenſchaft von Ausmeſſung der Körper.

Subtractio, Subtraction.

Superficies, Oberfläche.

T.

Tangens linea, Tangente.

Terminus,

Terminus, Glied.

Tetraedrum, ein pyramidaliſcher regulairer Körper.

Trapezium, ungleichſeitiges Viereck.

Triangulum, Triangel, acutangulum, ſpitzwinklichtes, aequicrurium, gleichſchenklichtes, aequilaterum, gleichſeitiges, obliquangulum, ſchiefwinklichtes, obtuſangulum, ſtumpfwinklichtes, planum, ebenes, rectangulum, rechtwinklichtes, ſcalenum, ungleichſeitiges, ſphaericum, ſphäriſches.

Trigonometria, Trigonometrie.

U.

Unitas, Einheit.

V.

Vaſa, Gefäſſe, cylindrica, cylindriſche.

Vertex, Scheitel.

Verticales anguli, Scheitelwinkel.

Virgula pithometrica, Viſirſtab.

Vitra ocularia, Augengläſer.

Verzeichniß
der benützten Schriftſteller.

1) Bergſträßer, (Joh. Andr. Benign.), Elementaralgebra, eine Ergänzung der Arithmetik des ſeel. Erneſti. Aus den Werken vortreflicher Algebraiker zum Gebrauche für Gymnaſien und Schulen. 8. Frft. am Mayn, 1789.

2) Buſſe, (Friedr. Gottlieb), erſter Unterricht in der algebraiſchen Auflöſung arithmetiſcher und geometriſcher Aufgaben, mit einer Vorrede Herrn Hofraths Käſtner. 2 Theile, 8. Deſſau, 1782.

3) Clemm, (Heinr. Wilh.) mathematiſches Lehrbuch, oder vollſtändiger Auszug aus allen ſowohl zur reinen, als angewandten Mathematik gehörigen Wiſſenſchaften. 2te Auflage, 8. Stuttgardt, 1768.

4) Ebert, (Joh. Jac.), nähere Unterweiſung in der Philoſophie und mathematiſchen Wiſſenſchaften für die obern Claſſen der Schulen und Gymnaſien. Mit Kupf. 8. Frft. und Leipzig, 1773.

5) Elementarwerk, neues für die niedern Claſſen lateiniſcher Schulen und Gymnaſien. Achter Theil, mit Kupf. 8. Halle, 1783.

6) Käſtner, (Abr. Gotth.), Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie und Perſpectiv, mit Kupf. dritte verbeſſerte Auflage, 8. Göttingen, 1774.

7) Maler, (Jac. Friedr.), Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen. Nebſt einer neuen Vorrede von Käſtner, 8. Carlsruhe, 1769.

8) De Rees, allgemeine Regel der Rechenkunſt, oder neueſte Art, alle Aufgaben, in welchen etwas ein Verhältniß zu andern Dingen hat, kurz und leicht aufzulöſen. Vierte Auflage, 8. Bremen, 1766.

9) Wolf, von, Freiherr, Anfangsgründe aller mathematiſchen Wiſſenſchaften, 8. Frft. und Leipzig, 1750.

10) — Elementa Matheſeos univerſae. Tom. I. 4. Halae Magdeb. 1742.

Errata.

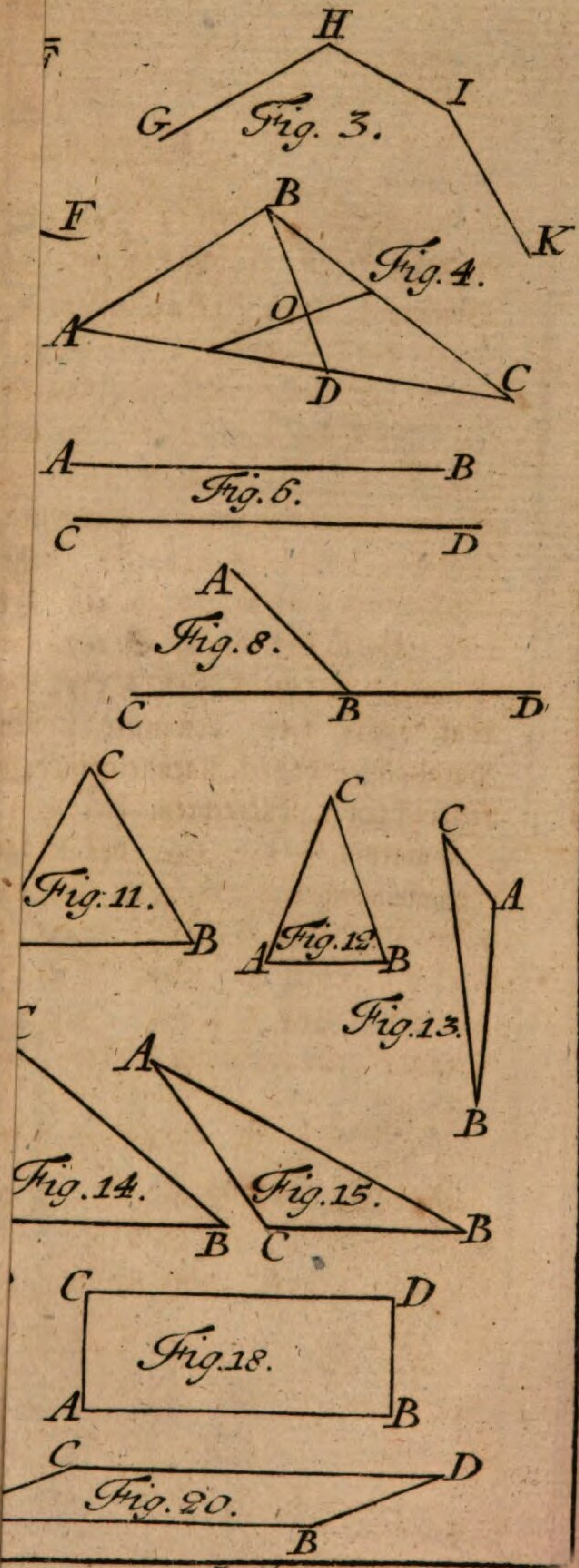
I. Text.

Statt Erden lies Erde. §. 17. zweier l. zwei. §. 42. l. Diviſors l. Diviſor. §. 48. a. lin. 16. wir l. wie. §. 53. l. 20. dnrch l. durch. §. 74. S. 43. l. 1. §. 157. l. 152. §. 237. l. 238. S. 115. l. 32. Prartica l. Practica. §. 260. l. 1. die l. der §. 284. l. 6. 90 l. 90°. §. 428. S. 210. l. 1. 45 l. 40°. §. 428. S. 210. l. 2. 60 l. 60°. §. 428. S. 210. l. 3. Taugente l. Tangente. §. 456. ſchneiden l. ſchneidet. §. 459. S. 222. l. 2. geht l. gehe. §. 465. l. 5. alſo (ſtreich einmal aus) §. 465. l. 18. db l. ob. §. 481. l. 11. die l. das. §. 524. S. 249. l. 2. der l. dem. §. 524. S. 249. l. 3. die l. das. §. 531. l. 5. Nuadrat l. Quadrat. §. 535. l. 5. benannte l. benanntes. §. 525. l. 11. Parallalepipedum l. Parallelepipedum. §. 545. S. 260. l. 5. fenkrechten l. ſenkrechten. §. 579. l. 17. Prismatnm l. Prismatum. §. 617. l. 9. des l. das §. 693. l. 1. tum l. Complementum. §. 716. l. 4. wegenommen l. weggenommen. §. 22. S. 400. l. 1. §. 476. l. §. 276, §. 130. l. §. 310. §. 394. l. §. 388. §. 490. l. §. 390. §. 473. l. §. 472. §. 498. l. §. 499. §. 513. l. §. 509. §. 175. l. §. 575. §. 648. l. §. 644. §. 679. l. §. 669.

II. Wiederholungen.

Statt 89. l. 86. S. 402. §. 41. Größen l. Ausdrücken. §. 86. (172) l. 172. S. 415. §. 160. einen l. einem. S. 449. §. 418. comentriſcher l. concentriſcher Cirkel. S. 462.

TAB. I. GEOM.



J. Mayr sc. Ratisb.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kohlhaas, Johann Jacob,

Reine Mathematik für schon geübtere Jünglinge Arithmetik, Geometrie, Ebene Trigonometrie, Fragmente aus der höhern Mathematik

Nürnberg 1798

Math.u. 91-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594033-8
VD18 15245101-001